

Подготовка к ЦЭ по математике

Простейшие тригонометрические неравенства

Часть 1.

Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$$\sin x \vee a,$$

$$\cos x \vee a,$$

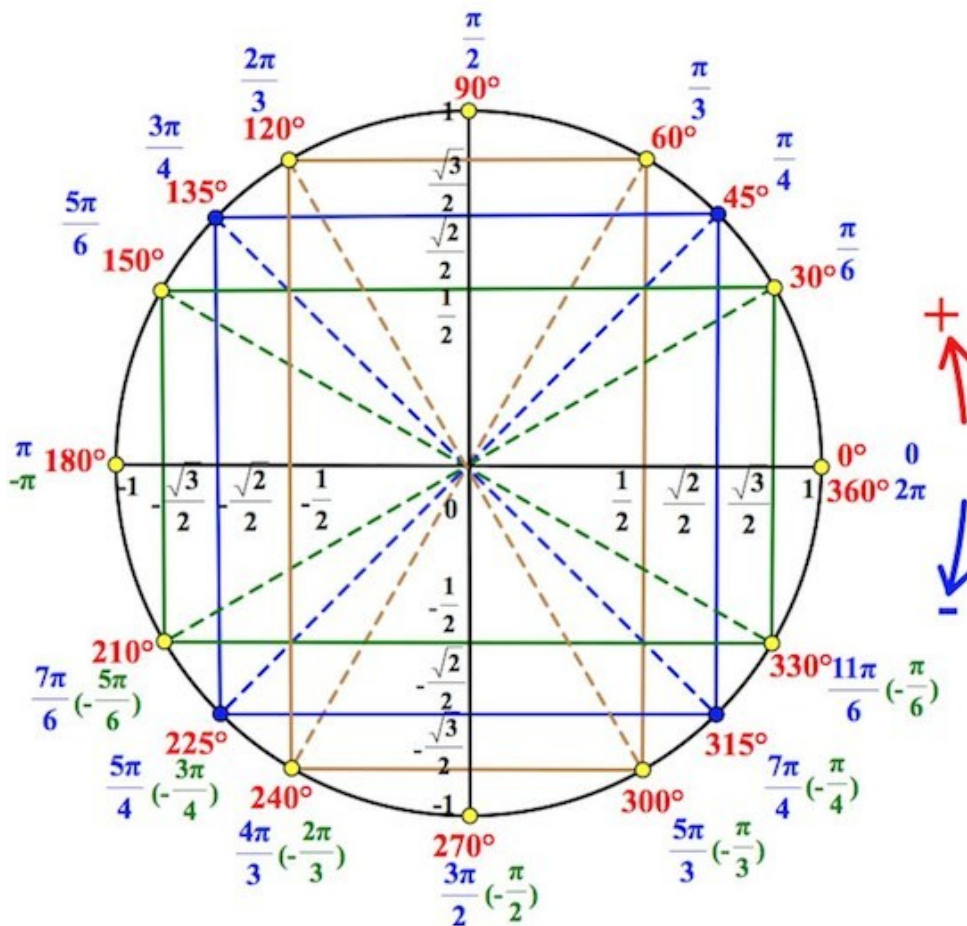
$$\operatorname{tg} x \vee a,$$

$$\operatorname{ctg} x \vee a,$$

где \vee – один из знаков $<$, $>$, \leq , \geq , $a \in R$.

Вы должны прежде, конечно, хорошо ориентироваться в тригонометрическом круге и уметь решать простейшие тригонометрические уравнения (часть I, часть II).





Сначала мы рассмотрим **простейшие тригонометрические неравенства с синусом и косинусом**. Во второй части статьи – с тангенсом, котангенсом.

Пример 1.

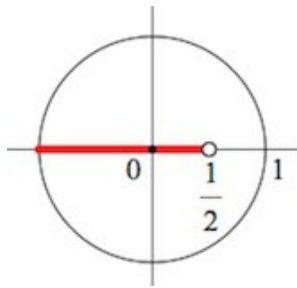
Решить неравенство: $\cos x < \frac{1}{2}$.

Решение:

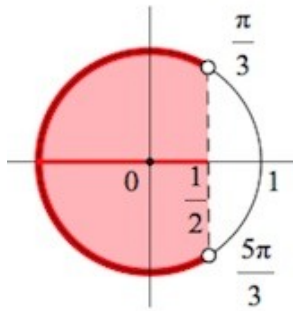
Отмечаем на оси косинусов $\frac{1}{2}$.

Все значения $\cos x$, меньшие $\frac{1}{2}$, – **левее** точки $\frac{1}{2}$ на оси косинусов.





Отмечаем все точки (дугу, точнее – серию дуг) тригонометрического круга, косинус которых будет меньше $\frac{1}{2}$.



Полученную дугу мы **проходим против часовой стрелки (!)**, то есть от точки $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

Обратите внимание, многие, назвав первую точку $\frac{\pi}{3}$, вместо второй точки $\frac{5\pi}{3}$ указывают точку $-\frac{\pi}{3}$, что неверно!

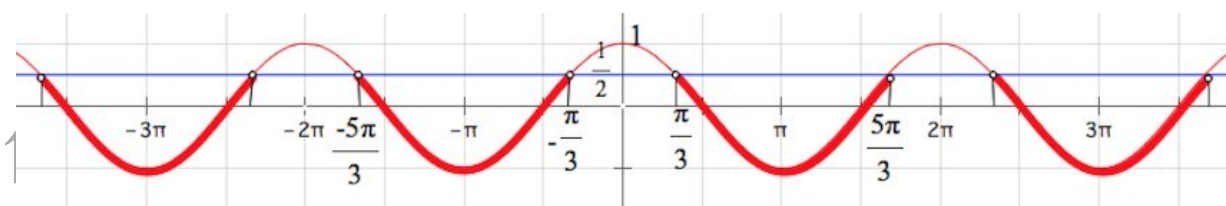
Становится видно, что неравенству удовлетворяют следующие значения x :

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Следите за тем, чтобы «правая/вторая точка» была бы больше «левой/первой».

Не забываем «накидывать» счетчик $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вот так выглядит графическое решение неравенства не на тригонометрическом круге, а в прямоугольной системе координат:



Пример 2.

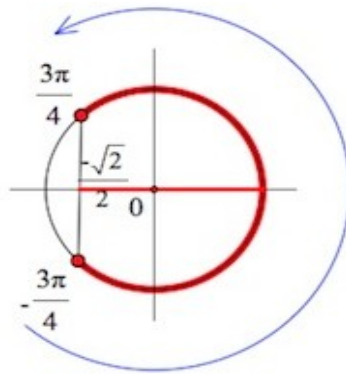
Решить неравенство: $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

Отмечаем на оси косинусов $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Все значения $\cos x$, большие или равные $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ – **правее** точки $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, включая саму точку.

Тогда выделенные красной дугой аргументы x отвечают тому условию, что $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

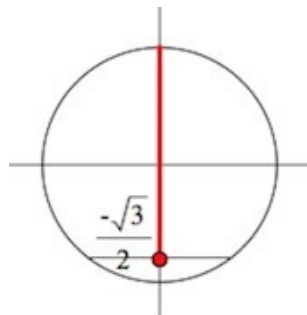
Пример 3.

Решить неравенство: $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

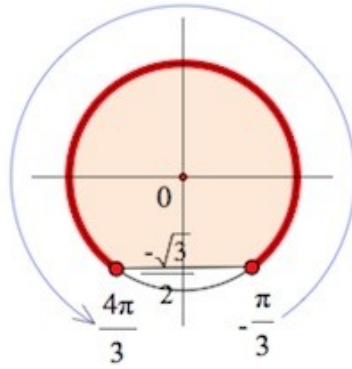
Решение:

Отмечаем на оси синусов $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Все значения $\sin x$, большие или равные $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, – **выше** точки $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, включая саму точку.



«Транслируем» выделенные точки на тригонометрический \uparrow круг:



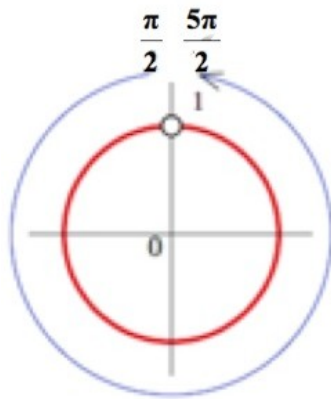
$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пример 4.

Решить неравенство: $\sin x < 1$.

Решение:

Кратко:



$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

или все x , кроме $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

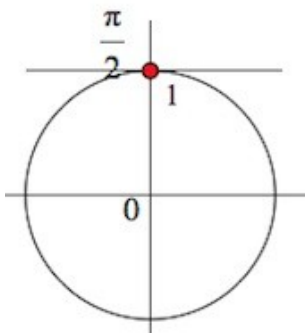
Пример 5.

Решить неравенство: $\sin x \geq 1$.

Решение:

Неравенство $\sin x \geq 1$ равносильно уравнению $\sin x = 1$ так как область значений функции $y = \sin x - [-1; 1]$.





$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

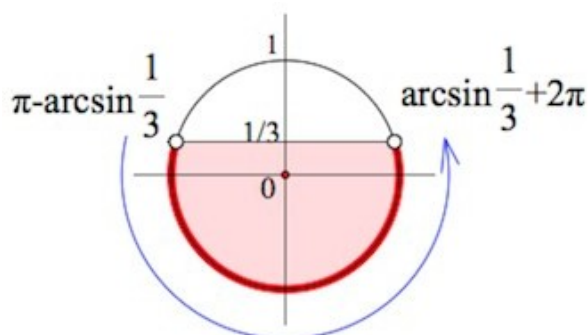
Пример 6.

Решить неравенство: $\sin x < \frac{1}{3}$.

Решение:

Действия – аналогичны применяемым в примерах выше. Но дело мы имеем не с табличным значением синуса.

Здесь, конечно, нужно знать определение [арксинуса](#).



$$\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Если не очень понятно, загляните сюда -> [+ показать](#)

Тренируемся в решении простейших тригонометрических неравенств

Имейте в виду, решения (ответы) к одному и тому же неравенству могут выглядеть по-разному, неся один и тот же смысл собою. Например, в задании 2 ответ можно было записать и так: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{11\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



1. Решить неравенство: $\sin x < -\frac{1}{2}$.

Ответ:

$$\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z$$

2. Решить неравенство: $\cos x > -\frac{1}{2}$.

Ответ:

$$\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$$

3. Решить неравенство: $\sin x \geq -1$.

Ответ:

$$(-\infty; +\infty)$$

4. Решить неравенство: $\sin x \geq 0$.

Ответ:

$$[2\pi n; \pi + 2\pi n, n \in Z]$$

5. Решить неравенство: $\cos x \leq 0,2$.

Ответ:

$$[\arccos 0,2 + 2\pi n; 2\pi - \arccos 0,2 + 2\pi n, n \in Z]$$