Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного угла

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$ решаются **с помощью введения вспомогательного угла**.

Давайте рассмотрим, как приводить выражение $a\sin x + b\cos x$ к $\sin\left(x+\varphi\right)$

1. Вынесем за скобки $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

2. Выражения $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ обладают очень важным для нас свойством:

$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ (проверьте это самостоятельно).

Следовательно, точка с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ принадлежит единичной окружности. (Уравнение единичной окружности $x^2+y^2=1$).

Значит, существует угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, и $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Подставим тригонометрические функции угла φ в наше выражение:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\, cox\, x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\varphi\right)$$

Рассмотрим пример решения уравнения такого типа:

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$$

1. Вынесем за скобку $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = \sqrt{3}$$

Получим:

Разделим обе части уравнения на 2:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пусть угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Очевидно, что $\varphi = \frac{\pi}{3}$

Перепишем уравнение:

$$\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Мы получили формулу косинуса суммы. Заметьте, все равно, какое число принимать за синус дополнительного угла, а какое за косинус - мы просто получим другую формулу.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Отсюда: $x = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$