Решение иррациональныхнеравенств.

Достаточно часто при решении иррациональных неравенств после преобразований получают неравенство вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ В этом случае обе части неравенства положительны и их можно возводить в квадрат. Возведение обеих частей в квадрат в общем случае позволяет получить неравенство, которое является следствием данного. Чтобы отсеять посторонние решения находят ОДЗ исходного (данного) неравенства и находят пересечение этих множеств.

Пример 1. Решить иррациональное неравенство. $\sqrt{20-x} > \sqrt{x+1}$

Решение.

1) Найдем ОДЗ.

$x + 1 \geq 0$ и $20 - x \geq 0$;

$-1 \leq x \leq 20$, следовательно, ОДЗ - $[-1; 20]$ (1)

2) Возведем обе части неравенства в квадрат. $20 - x > x + 1$;

$2x < 19$; $x < 9{,}5$, следовательно решение этого неравенства $(-\infty; 9{,}5)$ (2).

3) Найдем пересечение множеств (1) и (2), это будет множество $[-1; 9{,}5)$.

Ответ: $[-1; 9{,}5)$

Можно поступить иначе, сразу заменить исходное неравенство системой неравенств и решать полученную систему неравенств.

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Заметим, что $f(x) > g(x)$ и $g(x) \geq 0$, значит в силу транзитивного свойства неравенств, всюду, где выполняются указанные неравенства, $f(x) \geq 0$ и поэтому систему можно заменить другой системой

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

такая замена существенно упрощает решение иррационального уравнения.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{4-x^2} > \sqrt{x+5}$

$$\begin{cases} 4 - x^2 > x + 5; \\ x + 5 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 < 0; \\ x \geq -5; \end{cases}$$

Квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ имеет положительный старший коэффициент и отрицательный дискриминант, следовательно, он принимает только положительные значение, а это значит, что неравенство $x^2 + x + 1 < 0$; решений не имеет. Решение системы есть пустое множество.

Ответ: $x \in \varnothing$

Пример 3. Решить неравенство

$\sqrt{x^3 + x^2 + x + 2} > \sqrt{x^2 + x + 10}$.

Решение.

Составим систему неравенств.

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + x + 2 \quad 0, \\ x^2 + x + 100 \geq 0, \\ x^3 + x^2 + x + 2 > x^2 + x + 10; \end{cases} \qquad \geq$$

Так как первое неравенство является следстствие второго и третьего неравенств, его можно опустить.

$$\begin{cases} x^2 + x + 10 \geq 0, \\ x^3 + x^2 + x + 2 > x^2 + x + 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 10 \geq 0, \\ x^3 > 8; \end{cases}$$

У квадратного трехчлена $a = 1$ и $D = -39$, следовательно, он принимает положительные значени на всей области определения.

$$\begin{cases} (-\infty; +\infty), \\ (2; +\infty); \end{cases}$$

Ответ: $(2; +\infty)$.

1. Теперь рассмотрим уравнения вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Поскольку левая часть неравенства может принимать как положительные так и отрицательные значения, то возводить без определенных условий обе части в квадрат нельзя. Мы должны рассмотреть два случая: $g(x) < 0$ и $g(x) > 0$, то есть неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств.

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Так как g(x) > 0, то $(g(x))^2 > 0$ и, в силу транзитивного свойства неравенств, во второй системе первое неравенство можно опустить.

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{x+3.}$ > x + 1.

1. Решим первую систему.

$$\begin{cases} x + 3 \ge 0, \\ x + 1 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -3. \\ x < -1; \end{cases}$$

Решением этой системы является x∊[-3; -1). Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x + 3 \ge 0, \\ x + 1 \ge 0; \\ x + 3 > (x + 1)^2: \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -1; \\ x + 3 > x^2 + 2x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -1; \\ x^2 + x - 2 < 0; \end{cases}$$

У квадратного трехчлена $x^2 + x - 2$ a = 1, D = 1 + 8 = 16 > 0, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

$$\begin{cases} x \ge -1; \\ -2 < x < 1; \end{cases}$$

Решение второй системы x∊[-1; 1). Объеденив два полученных множества, получим множество являющееся решением иррационального уравнения x∊[-3; 1). Ответ: [-3; 1).

3. Неравенства вида $\sqrt{f(x)}$< g(x). Из определения квадратного корня следует, что $\sqrt{f(x)} \ge 0$, поэтому g(x) > 0. Тогда

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

Неравенство g(x) > 0 в этой системе опустить в общем случае нельзя.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+4} \leq$ 2x - 2.

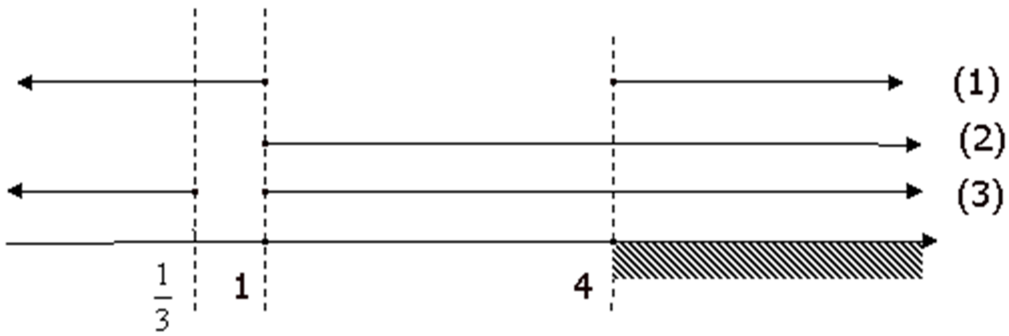
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0, \\ 2x - 2 \geq 0; \\ x^2 - 5x + 4 \geq (3x - 3)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \; x \geq 4, \\ x \geq 1; \\ (x - 1)(x - 4) \geq 4(x - 1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \text{ или } x \geq 3, \\ x \geq 1; \\ (x - 1)((x - 3) - 4(x - 1)) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \text{ или } x \geq 3, \\ x \geq 1; \\ (x - 1)(- 3x + 1) \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \text{ или } x \geq 3, & (1) \\ x \geq 1, & (2) \\ x \geq 1 \text{ или } x \geq \frac{1}{3} & (3) \end{cases}$$



Ответ: $\{1\} \cup [4; +\infty)$

4. Неравенство вида $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}>$ m(x). Чтобы избавиться от иррациональности в таких неравенствах приходится несколько раз возводить в квадрат обе части неравенства, при этом мы должны учитывать, что возводить в квадрат обе части неравенства можно в тех случаях, когда обе части либо положительны либо отрицательны (в последнем случае необходимо менять знак неравенства). Нужно также учитывать, что при возведении в квадрат может произойти расширение ОДЗ, что приведет к появлению посторонних решений, их нужно отсеять.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{x} \geq \sqrt{10-x}\ \sqrt{x-5}$

Решение.

Найдем ОДЗ. Для этого нам необходимо решить систему неравенств.

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 10 - x \geq 0; \\ x - 5 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 10; \\ x \geq 5; \end{cases} \leftrightarrow 5 \leq x \leq 10.$$

Таким образом ОДЗ данного неравенства есть множество чисел принадлежащих промежутку [5; 10]

Перенесем второе слагаемое в левую часть неравенства $\sqrt{x}+\sqrt{x-5} \geq \sqrt{10-x}$, тогда при любом значении переменной из ОДЗ обе части положительны. Возведем их в квадрат.

$x + x - 5 + 2\sqrt{x}\ \sqrt{x-5} \geq 10 - x;$

$2\sqrt{x}\ \sqrt{x-5} \geq 15 - 3x;$

В данном конкретном случае можно, по моему мнению, отклонится от стандартной схемы и вот почему. В правой части неравенства задана линейная функция t(x) = 15 - 3x, заданная на промежутке [5; 10]. Её угловой коэффициент k = -3, следовательно, она убывает и так как на концах промежутка она принимает соответственно значения t(5) = 0, t(10) = -15, то на указанном промежутке t(x)≤0.

На этом же промежутке $\sqrt{x} \geq 0$ и $\sqrt{x-5} \geq 0$ (из определения квадратного корня), следовательно, на указанном промежутке неравенство $2\sqrt{x}\ \sqrt{x-5} \geq 15 - 3x$ верно при любом значении переменной из ОДЗ.

Ответ: [5; 10].