Формулы преобразования тригонометрических выражений

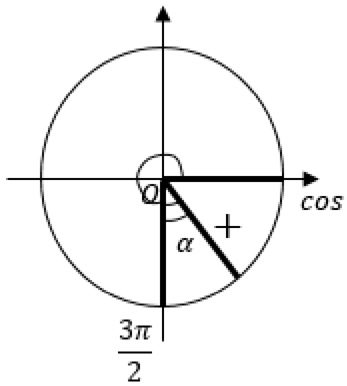
1. Формулы приведения

Формулы приведения используются для вычисления значений тригонометрических функций углов, которые можно выразить через углы $30°$, $45°$, $60°$ или через любой другой угол, для которого мы знаем значение тригонометрических функций.

Преобразования выражений вида $\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \mathrm{tg}\\ \mathrm{ctg}\end{matrix}\left(\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ \pi\\ \frac{3\pi}{2}\\ 2\pi\end{matrix}\pm\alpha\right)$ можно выполнить по следующему алгоритму:

1) Определить четверть, в которой находится угол . 2) Определить знак исходной функции в этой четверти. 3) Определить, меняется ли функция на кофункцию ($\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ – меняется, $\pi, 2\pi$ – не меняется).

Рассмотрим функцию $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$. Отложим на единичной окружности указанное в функции смещение аргумента на $\frac{3\pi}{2}$, что равно $270°$ и добавим острый угол α. В IV четверти косинус положительный.



Т.к. произвольный аргумент изменен на половинное число частей π, то она преобразуется в кофункцию, т.е. в синус. Получаем: $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$

$\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)=-\sin(180°+\alpha)=-\sin(360°-\alpha)$;

$\cos\alpha=-\cos(180°-\alpha)=-\cos(180°+\alpha)=\cos(360°-\alpha)$;

$\mathrm{tg}\,\alpha=-\mathrm{tg}(180°-\alpha)$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\mathrm{ctg}(180°-\alpha)$;

$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)=-\cos(90°+\alpha)=-\cos(270°-\alpha)=\cos(270°+\alpha)$;

$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)=\sin(90°+\alpha)=-\sin(270°-\alpha)=-\sin(270°+\alpha)$;

$\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=-\mathrm{ctg}(90°+\alpha)$; $\mathrm{ctg}\,\alpha=\mathrm{tg}(90°-\alpha)=-\mathrm{tg}(90°+\alpha)$.

2. Формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы/разности аргументов

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$.

Пример 1. Упростить выражение $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

3.Формулы двойного аргумента

$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)$; $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)$; $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$.

$\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)$; $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$; $\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Итак, получили формулы двойного угла:

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

Пример 2. Упростить выражение $\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}$.

$$\frac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}=\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1.$$

4.Тригонометрические функции тройного угла

Доказать тождество $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

$\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=$

$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=$

$=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-3\sin^3\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

Доказать тождество $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

$\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha=$

$= \cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha =$

$= \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

5.Формулы понижения степени

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

6. Формулы суммы/разности тригонометрических функций

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, 2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, 4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

5) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, 6) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$,

7) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, 8) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Пример 3. Преобразовать в произведение $\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha$.

$$\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - (\cos 4\alpha - \cos 5\alpha) = -2\sin\frac{2\alpha+3\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-3\alpha}{2} -$$
$$\left(-2\sin\frac{4\alpha+5\alpha}{2}\sin\frac{4\alpha-5\alpha}{2}\right) = -2\sin\frac{5\alpha}{2}\sin\frac{-\alpha}{2} + 2\sin\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{-\alpha}{2}$$
$$= 2\sin\frac{-\alpha}{2}\left(\sin\frac{9\alpha}{2} - \sin\frac{5\alpha}{2}\right) = -2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{9\alpha+5\alpha}{4}\sin\frac{9\alpha-5\alpha}{4}$$
$$= -4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}\sin\alpha$$

7.Формулы произведения тригонометрических функций

1) $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$, 2) $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$,

3) $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$,

Пример 4. Упростить выражение $2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \cos 2\alpha$.

$$2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) + \cos 2\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\Big(\cos\big((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\big) - \cos\big((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\big)\Big)$$
$$+ \cos 2\alpha = \cos 2\beta - \cos 2\alpha + \cos 2\alpha = \cos 2\beta$$

8. Универсальная тригонометрическая замена

1) $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, 2) $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, 3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

9. Вспомогательный аргумент

Для преобразования выражений вида $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ используют следующий метод. Вынесем $\sqrt{a^2+b^2}$ за скобки, тогда получим: $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$.

Сумма квадратов выражений $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ равна единице: $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Оба они лежат в промежутке $[-1;1]$, значит, эти числа являются синусом и косинусом некоторого угла.

$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi)$

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi)$, где под вспомогательным углом φ понимают $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Пример 5. Найти наименьшее значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Решение. Мы знаем, что синус и косинус принимают значения от -1 до 1, но, так как у обеих функций аргумент α, они связаны между собой. Когда $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha$ не может также равняться 1. Поэтому для оценки значения этого выражения преобразуем данное выражение. Вынесем $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$ за скобку:

$$\sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin\alpha + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$-1 \le \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) \le 1; \quad -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

Значит, наименьшее значение данного выражения $-\sqrt{2}$.

Реши самостоятельно:

Задание 1. Упростите выражение $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\pi-\alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)$.

Задание 2. Упростите выражение $\frac{2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

Задание 3. Упростите выражение $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

Задание 4. Упростите выражение $\frac{\sin 3\alpha+\sin\alpha-2\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha-2\cos 2\alpha}$.

Задание 5. Упростить выражение $\frac{(\sin 8\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 8\alpha)}{1-\cos 6\alpha}$.

Задание 6. Докажите тождество $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right) = \sin 4\alpha$.