

## Свойства корней $n$ -й степени ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ )

Свойства корней второй степени из числа  $a$  изучались в восьмом классе.

### Повторяем:

Квадратным корнем из числа  $a$  называют число, квадрат которого равен  $a$ . Арифметическим квадратным корнем из числа  $a$  называется неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ . Запись  $\sqrt{a}$  читается «арифметический квадратный корень из  $a$ »,  $\sqrt{a}$ ,  $a$  - подкоренное выражение, а знак  $\sqrt{\quad}$  - радикал (от латинского - корень).

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad \sqrt{a} = b, \quad b^2 = a$$

**Из истории.** Ещё 4000 лет назад вавилонские ученые составили наряду с таблицами умножения и таблицами обратных величин (при помощи которых деление чисел сводилось к умножению) таблицы квадратов чисел и квадратных корней чисел. При этом они умели находить приблизительное значение квадратного корня из любого целого числа.

В десятом классе изучаются корни  $n$ -й степени ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ).

Корнем  $n$ -й степени из числа  $a$  называется такое число  $b$ ,  $n$ -я степень которого равна  $a$ ,  $\sqrt[n]{a} = b$ .

Неотрицательное значение корня  $n$ -й степени из неотрицательного числа называется *арифметическим корнем*. Обозначение:  $\sqrt[n]{a}$  – арифметический корень  $n$ -й степени. Число  $n$  называется степенью арифметического корня,  $a$  - подкоренное выражение. Слово «арифметический», как правило, опускают.

Если  $n=2$ , то степень корня не указывается и пишется  $\sqrt{a}$ . Корень второй степени принято называть квадратным, а корень третьей степени – кубическим.

1.  $n$  - четное,  $a \geq 0, \quad b \geq 0 \quad \sqrt[n]{a} = b, \quad b^n = a$

$$\sqrt[4]{81} = 3; \quad \sqrt[8]{0} = 0; \quad \sqrt[6]{64} = 2; \quad \sqrt{144} = 12; \quad \sqrt[12]{1} = 1.$$

Выражения  $\sqrt[4]{-16}$ ;  $\sqrt[8]{-1}$ ;  $\sqrt{-4}$  не имеют смысла, так как подкоренное выражение - отрицательное число, а  $n$  - четное число.

2.  $n$  - нечетное  $a, b$  - любые,  $\sqrt[n]{a} = b, \quad b^n = a$

$$\sqrt[3]{27} = 3; \quad \sqrt[9]{0} = 0; \quad \sqrt[5]{-32} = -2; \quad \sqrt[7]{-1} = -1.$$

3.  $(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad ((\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geq 0,$

4.  $\sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad n$  - четное,  $n > 1 \quad (\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|)$

5.  $\sqrt[n]{a^n} = a, \quad n$  - нечетное,  $n > 1$

6.  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0; \quad n > 1, \quad n \in \mathbb{N}$

$$(\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0)$$

7.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0; \quad n > 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0)$

8.  $\sqrt[m]{\sqrt[k]{a^{km}}} = \sqrt[n]{a^k}; \quad a \geq 0; \quad n \in \mathbb{N}; \quad m \in \mathbb{N}; \quad k \in \mathbb{N}; \quad n > 1; \quad m > 1; \quad k > 1$

9.  $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad a \geq 0; \quad n > 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}$

## Закрепляем:

### Пример1.

Какие выражения имеют смысл?

$$\sqrt{1}; \sqrt{4}; \sqrt[3]{8}; \sqrt[3]{-27};$$

$$\sqrt[3]{1}; \sqrt[4]{5}; \sqrt{8}; \sqrt[4]{16};$$

$$\sqrt[3]{-1}; \sqrt[3]{27}; \sqrt{9}; \sqrt[4]{-16};$$

$$\sqrt[8]{-1}; \sqrt{-4}; \sqrt[3]{9}; \sqrt[5]{-32}.$$

**Решение.** Выражения:  $\sqrt{1}; \sqrt{4}; \sqrt[3]{8}; \sqrt[3]{-27}; \sqrt[3]{1}; \sqrt[4]{5}; \sqrt{8}; \sqrt[4]{16};$

$\sqrt[3]{-1}; \sqrt[3]{27}; \sqrt{9}; \sqrt[3]{9}; \sqrt[5]{-32}$  имеют смысл; а выражения:  $\sqrt[4]{-16};$

$\sqrt[8]{-1}; \sqrt{-4}$  не имеют смысла.

### Пример2.

$$1) \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}.$$

$$2) \sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}.$$

$$3) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{6}.$$

$$4) \sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}.$$

$$5) \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}.$$

## Решаем самостоятельно:

**Задание 1.** Какие из следующих выражений не имеют смысла?

$$\sqrt[16]{3}; -\sqrt[4]{2}; \sqrt[5]{0}; \sqrt[6]{-6}; \sqrt{-12}; \sqrt[7]{10}; \sqrt[8]{-22}; -\sqrt[9]{-7}.$$

**Задание 2.** Вычислите:

$$\sqrt{100}; \sqrt[5]{100000}; \sqrt{6,25}; \sqrt[4]{81}; \sqrt[3]{0,001}; \sqrt[3]{\frac{125}{27}}; \sqrt{0,16}; \sqrt[4]{\frac{81}{16}}.$$

**Задание 3.**

Вычислить:

$$а) 5 \sqrt[3]{0,125}; 0,7 \sqrt[4]{81}; \sqrt[5]{32};$$

$$б) (\sqrt[3]{2})^3; (-3 \sqrt[4]{5})^4; \sqrt[6]{8^2};$$

$$в) \sqrt[3]{27 \cdot 64}; \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{\frac{16}{81}}.$$

**Задание 4.** Найдите значение выражения:

$$\sqrt[4]{3^4}; (-\sqrt[4]{12})^4; \sqrt[4]{81 \cdot 16}; \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}; (\sqrt[3]{-2})^3 + (\sqrt[5]{8})^5; \sqrt[3]{27^2}; \sqrt[6]{81^3}; \sqrt[300]{125^{100}}; \sqrt[3]{-0,3} \cdot \sqrt[3]{-0,09}.$$