Применение свойств корней n-й степени для преобразования выражений

1. Вынесем множитель за знак корня:

$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$, n - четное, $a \geq 0$, $b \geq 0$, например, $\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$.

Если $a < 0$, $b > 0$, n - четное, то $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = |a| \sqrt[n]{b} = -a \sqrt[n]{b}$,

например, $\sqrt[4]{(-5)^4 \cdot 7} = 5 \sqrt[4]{7}$.

2. Внесем множитель под знак корня:

Например, $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Если $a > 0$, $b > 0$, n - четное, то , например, $a \sqrt[8]{b} = \sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[8]{b} = \sqrt[8]{a^8 \cdot b}$.

Если $a < 0$, то $a \sqrt[8]{b} = -\sqrt[8]{(-a)^8} \cdot \sqrt[8]{b} = -\sqrt[8]{a^8 \cdot b}$.

3. Следующая формула удобна, когда нужно избавиться от иррациональности в знаменателе.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}.$$

Например, $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3^2}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$.

4. Чтобы возвести корень в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение, не меняя показателя корня, то есть

$$\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^m = \sqrt[n]{a^{mp}}.$$

Например, $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$.

Закрепляем:

Пример 1

а) Вынести множитель из-под знака корня $\sqrt[4]{16x^4y}$ при условии, что $x<0$.

б) Внести множитель под знак корня $3y\sqrt[4]{x}$, зная, что $y< 0$.

Решение.

а) Так как $x<0$ по условию, а $y\geq 0$ (в противном случае выражение не имеет смысла), то $\sqrt[4]{16x^4y} = \sqrt[4]{2^4 \cdot x^4 \cdot y} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y} == 2|x|\sqrt[4]{y} = -2x\sqrt[4]{y}$.

б) Так как $y< 0$ по условию, а $x\geq 0$ (в противном случае не имеет смысла выражение $\sqrt[4]{x}$), то $3y\sqrt[4]{x} = -(-y) \cdot \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{x} = -\sqrt[4]{(-y)^4} \cdot \sqrt[4]{3^4 \cdot x} =$

$$= -\sqrt[4]{(-y)^4 \cdot 81x} = -\sqrt[4]{81xy^4}.$$

Пример 2

Выполнить действия: $(3\sqrt{5}-2)(2\sqrt{5}+1)$.

Решение. $(3\sqrt{5}-2)(2\sqrt{5}+1)=6\sqrt{25}+3\sqrt{5}-4\sqrt{5}-2=30-\sqrt{5}-2=28-\sqrt{5}$.

Пример 3

Освободиться от иррациональности в знаменателе:

$\dfrac{2+\sqrt{p}}{2-\sqrt{p}},\ p>0.$

Решение. $\dfrac{2+\sqrt{p}}{2-\sqrt{p}}=\dfrac{(2+\sqrt{p})(2+\sqrt{p})}{(2-\sqrt{p})(2+\sqrt{p})}=\dfrac{(2+\sqrt{p})^2}{4-p}$.

Пример 4

а) Упростите выражение $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y})$

Решение. $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y})=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})(\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{xy}+\sqrt[6]{y^2})=$
$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})\left((\sqrt[6]{x})^3+(\sqrt[6]{y})^3\right)=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x-y$.

б) Упростите выражение:

$\sqrt{21-12\sqrt{3}}=\sqrt{12-12\sqrt{3}+9}=\sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}=|2\sqrt{3}-3|=2\sqrt{3}-3.$

Решаем самостоятельно:

Задание 1. При каких значениях переменной *a* выражение имеет смысл?

$\sqrt{a};\ \sqrt{a^2};\ \sqrt{-a};\ \sqrt{a^3};\ \sqrt{-a^2};\ \sqrt[3]{a};\ \sqrt[4]{a};\ \sqrt{-a^5};\ \sqrt[5]{a^2};\ \sqrt[6]{a^3}.$

Задание 2. Вычислите:

а) $\dfrac{20}{(4\sqrt{5})^2}$; *б)* $\sqrt{7^2\cdot 2^8\cdot 5^2}$; *в)* $\sqrt[4]{(-3)^2\cdot 2}\cdot\sqrt[4]{8\cdot 9}$; *г)* $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$.

Задание 3. Упростите для отрицательного *a* выражение $\sqrt[3]{-64\sqrt{a^{18}}}$.

Задание 4. Упростите выражение: $\dfrac{4\cdot\sqrt[6]{4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[3]{4}}}$.

Задание 5. Упростите выражение: $\sqrt[4]{256a^4b^8c^{12}}$, если $a<0,\ c>0$.

Задание 6. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{(x-8,5)^6}+\sqrt[4]{(x-12,5)^4}$,
если $9,2\le x\le 12,2$.