Логарифмические неравенства

Решая логарифмические неравенства, мы пользуемся свойством монотонности логарифмической функции.
Также мыиспользуем определение логарифма и основные логарифмические формулы.

Давайте повторим, что такое логарифмы:

Логарифм положительного числа b по основанию a – это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b.

$$\boldsymbol{log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}.$$

При этом $b>0, a>0, a \neq 1.$

Основное логарифмическое тождество:

$$\boldsymbol{a^{log_a b} = b},$$

$$\boldsymbol{log_a a^c = c}.$$

Основные формулы для логарифмов:

$\boldsymbol{log_a(bc) = log_a b + log_a c}$ (Логарифм произведения равен сумме логарифмов)

$\boldsymbol{log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c}$ (Логарифм частного равен разности логарифмов)

$\boldsymbol{log_a b^m = m log_a b}$ (Формула для логарифма степени)

Формула перехода к новому основанию:

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}}$$

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{1}{log_b a}}.$$

Алгоритм решения логарифмических неравенств

Можно сказать, что логарифмические неравенства решаются по определенному алгоритму. Нам нужно записать областьдопустимых значений (ОДЗ) неравенства. Привести неравенство к виду $log_a x_1 < log_a x_2$. Знак здесь может быть любой: $>, >, <$. Важно, чтобы слева и справа в неравенстве находились логарифмы по одному и тому же основанию.

И после этого «отбрасываем» логарифмы! При этом, если основание степени $a>1$, знак неравенства остается тем же. Если основание такое, что 0< a < 1 знак неравенства меняется на противоположный.
Конечно, мы не просто «отбрасываем» логарифмы. Мы пользуемся свойством монотонности логарифмической функции.

Если основание логарифма больше единицы, логарифмическая функция монотонно возрастает, и тогда большему

значению x соответствует большее значение $log_a x$

Если основание больше нуля и меньше единицы, логарифмическая функция монотонно убывает. Большему значениюаргумента x будет соответствовать меньшее значение $log_a x$.

Важное замечание: лучше всего записывать решение в виде цепочки равносильных

переходов.Перейдем к практике. Как всегда, начнем с самых простых неравенств.

1. Рассмотрим неравенство $\log_3 x > \log_3 5$.
Поскольку логарифмы определены только для положительных чисел, необходимо, чтобы x был положительным. Условие x > 0называется областью допустимых значений (ОДЗ) данного неравенства. Только при таких x неравенство имеет смысл.

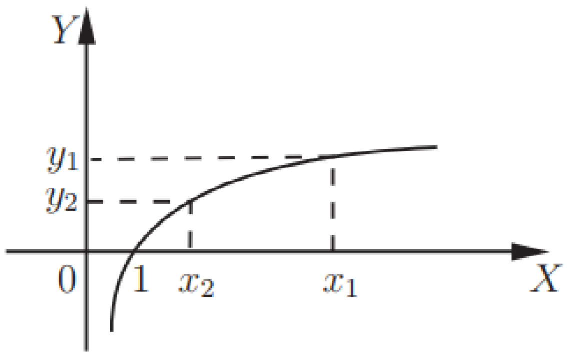
Что делать дальше? Стандартный ответ, который дают школьники, – «Отбросить логарифмы!»

Что ж, эта формулировка лихо звучит и легко запоминается. Но почему мы все-таки можем это сделать?

Мы люди, мы обладаем интеллектом. Наш разум устроен так, что все логичное, понятное, имеющее внутреннюю структурузапоминается и применяется намного лучше, чем случайные и не связанные между собой факты. Вот почему важно не механически вызубрить правила, как дрессированная собачка-математик, а действовать осознанно.

Так почему же мы все-таки «отбрасываем логарифмы»?

Ответ простой: если основание больше единицы (как в нашем случае), логарифмическая функция монотонно возрастает,значит, большему значению x соответствует большее значение y и из неравенства $\log_3 x_1 > \log_3 x_2$



$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_3 x_1 > \log_3 x_2$$

следует, что $x_1 > x_2$.

Обратите внимание, мы перешли к алгебраическому неравенству, и знак неравенства при этом —

сохраняется.Итак, x > 5.

Следующее логарифмическое неравенство

тоже простое.2. $\log_5(15 + 3x) > \log_5 2x$

Начнём с области допустимых значений. Логарифмы определены только для положительных чисел, поэтому

$$\begin{cases} 15 + 3x > 0; \\ 2x > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: x > 0.

Теперь от логарифмического неравенства перейдем к алгебраическому — «отбросим» логарифмы. Поскольку основаниелогарифма больше единицы, знак неравенства при этом сохраняется.

15 + 3x > 2x.

Получаем: x > −15.Итак,

Ответ: x > 0.

$$\begin{cases} x > 0; \\ x > -15. \end{cases}$$

А что же будет, если основание логарифма меньше единицы? Легко догадаться, что в этом случае при переходе калгебраическому неравенству знак неравенства будет меняться.

Приведем пример.

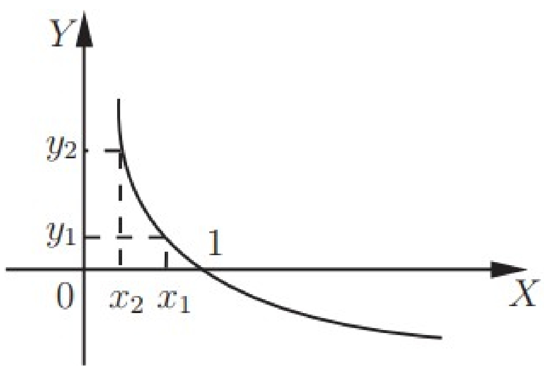
3. $log_{\frac{5}{6}}(2x - 9) \geq log_{\frac{5}{6}} x.$

Запишем ОДЗ. Выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительно, то есть

$$\begin{cases} 2x - 9 > 0; \\ x > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: x > 4,5.

Поскольку $\frac{5}{6} < 1$, логарифмическая функция с основанием $\frac{5}{6}$ монотонно убывает. А это значит, что большему значениюфункции отвечает меньшее значение аргумента:



$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_{\frac{5}{6}} x_1 < \log_{\frac{5}{6}} x_1$$

И если $log_{\frac{5}{6}}(2x-9) \geq log_{\frac{5}{6}}x$, то
2x − 9 ≤ x.

Получим, что x ≤ 9.

Учитывая, что x > 4,5, запишем ответ:

x ∈ (4,5; 9].

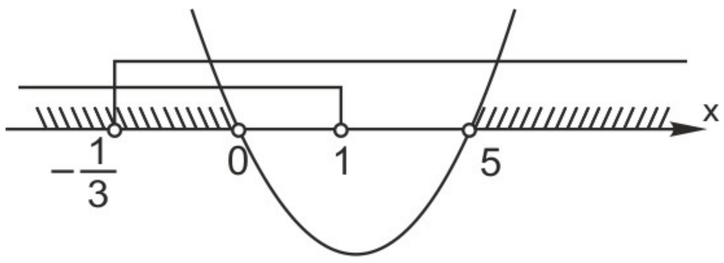
В следующей задаче логарифмическое неравенство сводится к квадратному. Так что тему «квадратные неравенства»рекомендуем повторить.

Теперь более сложные неравенства:

4. Решите неравенство $2log_{\frac{1}{2}}(1-x) < log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$

$$2\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1-x>0 \\ 3x+1>0 \\ (1-x)^2>3x+1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x<1 \\ x>-\frac{1}{3} \\ 1+x^2-2x>3x+1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x<1 \\ x>-\frac{1}{3} \\ x^2-5x>0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x<1 \\ x>-\frac{1}{3} \\ x(x-5)>0 \end{array}\right.$$



Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$

5. Решите неравенство $log_{x^2+1}\frac{2\cdot4^x-15\cdot2^x+23}{4^x-9\cdot2^x+14} \geq 0$

ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} x^2+1>0 \\ x^2+1 \neq 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x \neq 0$

Если $x \neq 0$, то $x^2+1>1$. Нам повезло! Мы знаем, что основание логарифма больше единицы для всех значений x, входящихв ОДЗ.

$$\frac{2\cdot4^x-15\cdot2^x+23}{4^x-9\cdot2^x+14} \geq 1$$

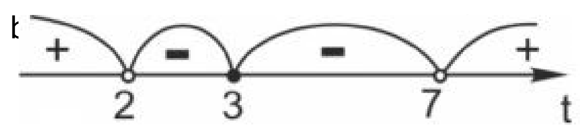
Сделаем замену $2^x = t, t>0.$

$$\frac{2t^2-15t+23}{t^2-9t+14} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2t^2-15t+23-t^2+9t-14}{t^2-9t+14} \geq 0$$

$$\frac{t^2-6t+9}{t^2-9t+14} \geq 0$$

$$\frac{(t-3)^2}{(t-2)(t-7)} \geq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t>7 \\ t<2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{l} 2^x=3 \\ 2^x>7 \\ 2^x<2 \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{l} x=\log_2 3 \\ x<1 \\ x>\log_2 7 \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{array}\right.$$

Обратите внимание, что сначала мы полностью решаем неравенство относительно новой переменной t. И только после этоговозвращаемся к переменной x. Запомните это и не ошибайтесь на экзамене!

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup \{\log_2 3\} \cup (\log_2 7; +\infty)$

6. $4log_x4 + 3log_{\frac{4}{x}}4 + 4log_{16x}4 \leq 0$

Запомним правило: если в уравнении или неравенстве присутствуют корни, дроби или логарифмы — решение надо начинать собласти допустимых значений. Поскольку основание логарифма должно быть положительно и не равно единице, получим систему условий:

$$\begin{cases} x > 0; \\ \frac{4}{x} \neq 1; \\ x \neq 1; \\ 16x \neq 1. \end{cases}$$

Упростим эту систему:

$$\begin{cases} x > 0; \\ x \neq 4; \\ x \neq 1; \\ x \neq \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Это область допустимых значений неравенства.

Мы видим, что переменная содержится в основании логарифма. Перейдем к постоянному основанию. Напомним, что

$$log_ab = \frac{1}{log_ba}$$

В данном случае удобно перейти к основанию 4.

$$\frac{4}{log_4x} + \frac{3}{log_4\frac{4}{x}} + \frac{4}{log_4(16x)} \leq 0;$$

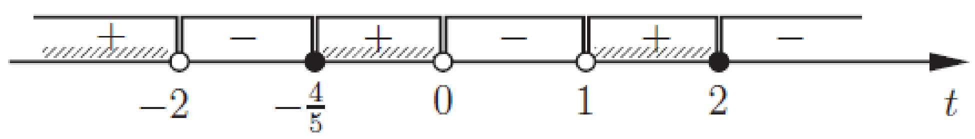
$$\frac{4}{log_4x} + \frac{3}{1 - log_4x} + \frac{4}{2 + log_4x} \leq 0$$

Сделаем замену $log_4x = t$:

$$\frac{4}{t} + \frac{3}{1-t} + \frac{4}{2+t} \leq 0$$

Упростим неравенство и решим его методом интервалов:

$$\frac{(t-2)(t+\frac{4}{5})}{t(1-t)(2+t)} \geq 0.$$



Итак,

$t \in (-\infty; -2) \cup \left[-\frac{4}{5}; 0\right) \cup (1; 2].$

Вернемся к переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{l} log_4x < -2 \\ -\frac{4}{5} \leq log_4x < 0 \\ 1 \leq log_4x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{16} \\ 4^{-\frac{4}{5}} \leq x < 1 \\ 4 < x \leq 16 \end{array}\right. \end{cases}$$

Мы добавили условие *x* > 0 (из ОДЗ).

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[4^{-\frac{4}{5}}; 1\right) \cup (4; 16]$

7. Следующая задача тоже решается с помощью метода интервалов

$$log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1$$

Как всегда, решение логарифмического неравенства начинаем с области допустимых значений. В данном случае

$$\frac{2-3x}{x} > 0$$

Это условие обязательно должно выполняться, и к нему мы вернемся. Рассмотрим пока само неравенство. Запишем левуючасть как логарифм по основанию 3:

$$log_3\frac{x}{2-3x} \geq -1.$$

Правую часть тоже можно записать как логарифм по основанию 3, а затем перейти к алгебраическому неравенству:

$$log_3\frac{x}{2-3x} \geq log_3\frac{1}{3};$$

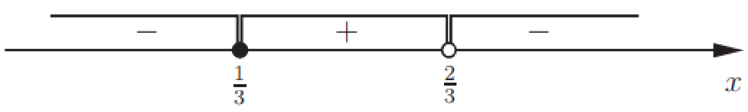
$$\frac{x}{2-3x} \geq \frac{1}{3}.$$

Видим, что условие $\frac{2-3x}{x} > 0$ (то есть ОДЗ) теперь выполняется автоматически. Что ж, это упрощает решение неравенства.

$$\frac{x}{2-3x} - \frac{1}{3} \geq 0;$$

$$\frac{3x-1}{2-3x} \geq 0;$$

Решаем неравенство методом интервалов:



Ответ: $$x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Получилось? Что же, повышаем уровень сложности:

8. Решите неравенство:

$$\log_3\left(x^2+7x+10\right)+\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+5}{9}+1 \geq \log_3\left(3x^2+16x+20\right)$$

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2+7x+10>0 \\ x+5>0 \\ 3x^2+16x+20>0 \\ \log_3\left(x^2+7x+10\right)-\log_3\frac{x+5}{9}+\log_3 3 \geq \log_3\left(3x^2+16x+20\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x+2)>0 \\ x+5>0 \\ (x+2)(x+\frac{10}{3})>0 \\ log_3\frac{(x+5)(x+2)\cdot 9\cdot 3}{(x+5)}>log_3\left(3(x+2)(x+\frac{10}{3})\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-2 \\ 9\cdot(x+2) \geq (x+2)(x+\frac{10}{3}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-2 \\ x+\frac{10}{3} \leq 9 \end{cases} <=> \begin{cases} x>-2 \\ x \leq \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$x^2+7x+10=0$$
$$D=0;$$
$$x_{1,2}=\frac{-7\pm 3}{2};$$
$$x_1=-5x;\ x_2=-2;$$
$$3x^2+16x+20=0$$
$$D=16^2-12\cdot 20=$$
$$=16\cdot(16-3\cdot 5)=16;$$
$$x \in \left(-2; \frac{17}{3}\right].$$
$$x_{1,2}=\frac{\quad}{6};$$
$$x_1=-2;\ x_2=-\frac{10}{3}$$

9. Решите неравенство:

$$log_2\left(\left(5^{-x^2}-3\right)\left(5^{-x^2+9}-1\right)\right)+log_2\frac{5^{-x^2}-3}{5^{-x^2+9}-1} > log_2\left(5^{4-x^2}-2\right)^2.$$

Выражение 5^{-x^2} навязчиво повторяется в условии задачи. А это значит, что можно сделать замену:

$$5^{-x^2}=t$$

Поскольку показательная функция принимает только положительные значения, $t > 0$. Тогда

$$5^{-x^2+9} = 5^9 \cdot t$$

$$5^{4-x^2} = 5^4 \cdot t = 625t$$

Неравенство примет вид:

$$log_2\left((t-3)\left(5^9 \cdot t - 1\right)\right) + log_2\frac{t-3}{5^9 \cdot t - 1} > log_2\left(625t-2\right)^2$$

Уже лучше. Найдем область допустимых значений неравенства. Мы уже сказали, что $t > 0$. Кроме того, $(t - 3)$ $(5^9 \cdot t - 1) > 0$Если это условие выполнено, то и частное $\frac{t-3}{5^9 \cdot t - 1}$ будет положительным.

А еще выражение под логарифмом в правой части неравенства должно быть положительно, то есть $(625t - 2)^2$.

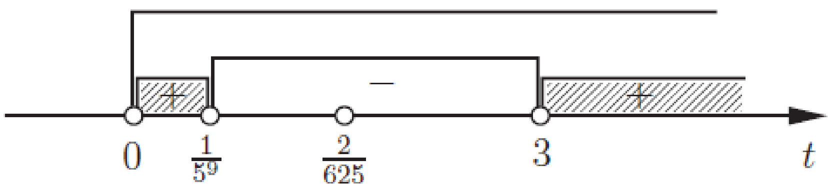
Это означает, что $625t - 2 \neq 0$, то

есть $t \neq \frac{2}{625}$ Аккуратно запишем

ОДЗ

$$\begin{cases} t > 0; \\ \frac{t-3}{5^9 \cdot t - 1} > 0; \\ 625t - 2 \neq 0 \end{cases}$$

и решим получившуюся систему, применяя метод интервалов.



Итак, $$t \in \left(0; \frac{1}{5^9}\right) \cup (3; +\infty).$$

Ну что ж, полдела сделано – разобрались с ОДЗ. Решаем само неравенство. Сумму логарифмов в левой части представимкак логарифм произведения:

$$log_2\frac{(t-3)\cancel{(5^9 \cdot t - 1)}(t-3)}{\cancel{(5^9 \cdot t - 1)}} > log_2(625t-2)^2$$

«Отбросим» логарифмы. Знак неравенства сохраняется.

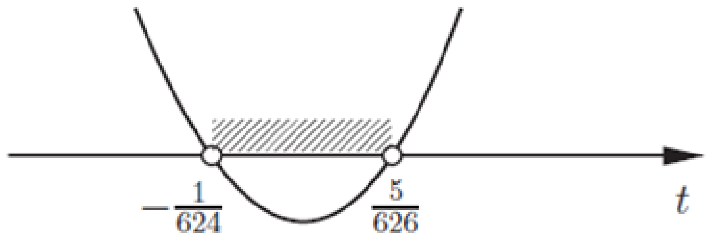
$$(t-3)^2 > (625t-2)^2$$

Перенесем все в левую часть и разложим по известной формуле разности квадратов:

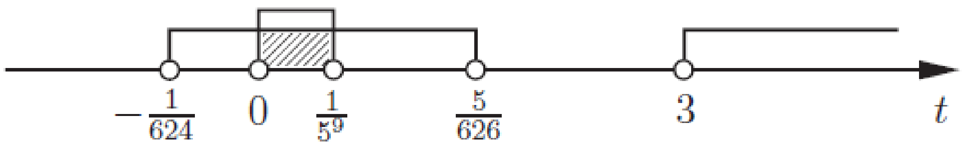
$$(t-3)^2 - (625t-2)^2 > 0;$$

$$(t - 3 - 625t + 2)(t - 3 + 625t - 2) > 0;$$

$$(-624t-1)(626t-5)>0.$$



Вспомним, что $t \in \left(0; \frac{1}{5^9}\right) \cup (3; +\infty)$ (это ОДЗ неравенства) и найдем пересечениеполученных промежутков.

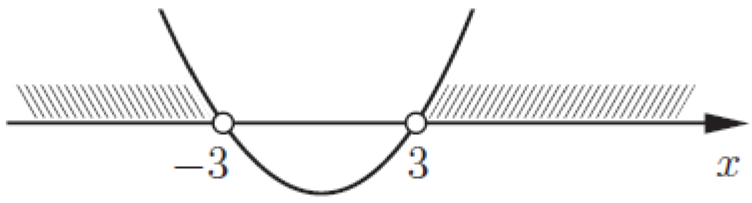


Получим, что $t < \frac{1}{5^9}$

Вернемся к переменной *x*

Поскольку $t = 5^{-x^2}$,

$$5^{-x^2} < 5^{-9};$$
$$-x^2 < -9;$$
$$x^2 > 9;$$
$$(x-3)(x+3) > 0$$



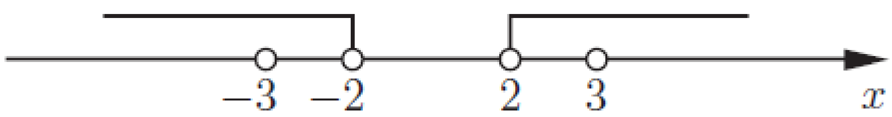
Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

10. Еще один прием, упрощающий решение логарифмических неравенств, — переход к постоянному основанию. Покажем, какиспользовать переход к другому основанию и обобщенный метод интервалов.

$$log_{|x|-2}|x-3| \le 0.$$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} |x|-2>0; \\ |x|-2 \ne 1; \\ |x-3| \ne 0. \end{cases}$$



Воспользуемся формулой и перейдем к $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$основанию 10:

$$\frac{lg|x-3|}{lg(|x|-2)} \le 0.$$

Применим обобщенный метод интервалов. Выражение в левой части неравенства можно записать как функцию

$$g(x) = \frac{lg|x-3|}{lg(|x|-2)}.$$

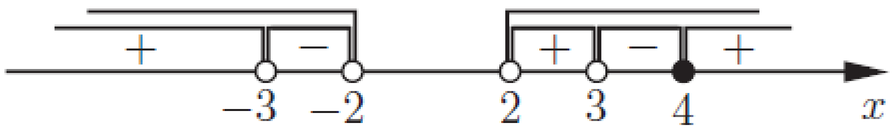
Эта функция может менять знак в точках, где она равна нулю или не существует.

Выражение lg $|x-3|$ равно нулю, если $|x-3| = 1$, то есть $x = 4$ или $x = 2$.

Выражение lg $(|x|-2)$ равно нулю, если $|x| = 3$, то есть в

точках 3 и −3.Отметим эти точки на числовой прямой, с

учетом ОДЗ неравенства.



Найдем знак функции *g(x)* на каждом из промежутков, на которые эти точки разбиваютобласть допустимых значений. Точно так же мы решали методом интервалов обычные рациональные неравенства.

Ответ: $x \in (-3; -2) \cup (3; 4]$.

11. А в следующей задаче спрятаны целых две ловушки для невнимательных абитуриентов.

$$log_{x+2}(36 + 16x - x^2) - \frac{1}{16} log^2_{x+2}(x - 18)^2 \geq 2.$$

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 \neq 1 \\ 36 + 16x - x^2 > 0 \\ x \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq -1 \\ x \in (-2; 18) \end{cases}$$

Итак, $x \in (-2; -1) \cup (1; 18)$. Это ОДЗ.

Обратите внимание, что $36 + 16x - x^2 = -(x + 2)(x - 18)$.

Это пригодится вам при решении

неравенства.Упростим исходное

неравенство:

$$log_{x+2}((18 - x)(x + 2)) - \frac{1}{16} log^2_{x+2}(x - 18)^2 \geq 2;$$

$$1 + log_{x+2}(18 - x) - \frac{1}{16} log^2_{x+2}(x - 18)^2 \geq 2;$$

Теперь главное - не спешить. Мы уже говорили, что задача непростая - в ней расставлены ловушки. В первую вы попадете,если напишете, что $log_{x+2}(x - 18)^2 = 2log_{x+2}(x - 18)$. Ведь выражение $log_{x+2}(x - 18)$ в данном случае не имеет смысла,поскольку $x < 18$.

Как же быть? Вспомним, что $(x - 18)^2 = (18 - x)^2$. Тогда:

$$1 + log_{x+2}(18 - x) - \frac{1}{16} log^2_{x+2}(18 - x)^2 \geq 2.$$

Вторая ловушка - попроще.

Запись $log^2_a b$ означает, что сначала надо вычислить логарифм, а потом возвести полученное выражение в квадрат. Поэтому:

$$log^2_{x+2}(18-x)^2 = (log_{x+2}(18-x)^2)^2 = (2log_{x+2}(18-x))^2 = 4log^2_{x+2}(18-x).$$

Дальше - всё просто. Сделаем замену $log_{x+2}(18 - x) = t$

$$t - \frac{1}{4}t^2 \geq 1;$$

$$t^2 - 4t + 4 \leq 0;$$

$$(t - 2)^2 \leq 0.$$

Выражение в левой части этого неравенства не может быть отрицательным, поэтому $t = 2$. Тогда

$$log_{x+2}(18 - x) = 2;$$

$$log_{x+2}(18 - x) = log_{x+2}(x + 2)^2;$$

$$18 - x = x^2 + 4x + 4;$$

$$x^2 + 5x - 14 = 0;$$

$x_1 = -7$ - не удовлетворяет ОДЗ;

$x_2 = 2.$

Ответ: 2.