

Тема: Делители числа. Кратные числа. НОД (Наибольший общий множитель). НОК (Наибольший общий делитель). Признаки делимости

Что такое делитель?

Мы знаем, что делитель это число, показывающее на сколько частей нужно разделить делимое. Например, в выражении $8 : 2 = 4$, делителем является число 2. Это число показывает на сколько частей нужно разделить число 8. После деления получается ответ 4. Как видно из примера, число 8 делится на число 2 без остатка. Говорят, что число 2 является делителем числа 8.

Пример 1. Число 2 является делителем числа 8, поскольку 8 делится на 2 без остатка:

$$8 : 2 = 4$$

Пример 2. Число 3 является делителем числа 9, поскольку 9 делится на 3 без остатка:

$$9 : 3 = 3$$

Пример 3. Число 4 не является делителем числа 10 поскольку 10 не делится на 4 без остатка:

$$10 : 4 = 2 \text{ (2 в остатке)}$$

Определение. Делителем числа a называется число, на которое число a делится без остатка.

Данное определение содержит переменную a . Подставим вместо этой переменной любое число, например число 12 и прочитаем определение:

Делителем числа 12 называется число, на которое 12 делится без остатка.

Попробуем перечислить эти числа: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Все эти числа являются делителями числа 12, поскольку число 12 делится на них без остатка.

Покажем это:

$$12 : 1 = 12$$

$$12 : 2 = 6$$

$$12 : 3 = 4$$

$$12 : 4 = 3$$

$$12 : 6 = 2$$

$$12 : 12 = 1$$

Кратные числа

Если какое-нибудь число без остатка разделилось на другое, то его называют кратным этого числа. Например, 6 без остатка делится на 3. Поэтому 6 является кратным числа 3

$$6 : 3 = 2$$

Определение. Кратным числа a называется число, которое делится без остатка на a .

Данное определение содержит переменную a . Подставим вместо этой переменной любое число, например число 5 и прочитаем определение:

Кратным числа 5 называется число, которое делится без остатка на 5.

У любого числа бесконечно много кратных. Например, первыми кратными числа 5, являются числа 5, 10, 15, 20, 25. Все они кратны 5, поскольку делятся на 5 без остатка:

$$5 : 5 = 1$$

$$10 : 5 = 2$$

$$15 : 5 = 3$$

$$20 : 5 = 4$$

$$25 : 5 = 5$$

НОД и НОК

9

Делители



Кратные



НОД	НОК																																										
<p>Наибольший общий делитель (НОД) двух данных чисел a и b - это наибольшее число, <u>на которое</u> оба числа a и b делятся без остатка.</p>	<p>Наименьшим общим кратным (НОК) двух и более натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, <u>которое</u> делится нацело на каждое из этих чисел.</p>																																										
<p>I способ нахождения НОД методом перебора делителей</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Найти делители каждого числа; 2. Найти общие делители; 3. Выбрать <i>наибольший</i> общий делитель. <p style="text-align: center;">Найти НОД 10 и 15.</p> <p style="text-align: center;">Д (10) = {1, 2, 5, 10} Д (15) = {1, 3, 5, 15}</p> <p style="text-align: center;">Д (10, 15) = {1, 5} НОД (10; 15) = 5</p>	<p>I способ нахождения НОК методом перебора кратных</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Берем большее из чисел 2. Находим числа кратные выбранному (умножая выбранное число последовательно на 1, 2, 3, 4, 5, и тд) 3. Каждое полученное кратное проверяем делится ли оно на оставшиеся число; первое такое кратное и есть НОК. <p style="text-align: center;">Найти НОК 18 и 24</p> <p style="text-align: center;">24•1=24 (не делится на 18) 24•2=48 (не делится на 18) 24•3=72 - делится на 18 НОК (24, 18)=72</p>																																										
<p>II способ нахождения НОД через разложения на простые множители</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Разложить числа на простые множители; 2. Подчеркнуть одинаковые простые множители в обоих числах; 3. Найти произведение одинаковых простых множителей и записать ответ. <p style="text-align: center;">Найти НОД 48 и 36.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 5px;">48</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">24</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">12</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">6</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>3</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> </table> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 5px;">36</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">18</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">9</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>3</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>3</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> </table> </div> <p style="text-align: center;">НОД (48; 36) = 2 • 2 • 3 = 12</p>	48	<u>2</u>	24	<u>2</u>	12	<u>2</u>	6	<u>2</u>	3	<u>3</u>	1		36	<u>2</u>	18	<u>2</u>	9	<u>3</u>	3	<u>3</u>	1		<p>II способ нахождения НОК через разложения на простые множители</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Разложить на простые множители каждое число; 2. Выписать все множители из разложения одного любого числа; 3. Добавить к ним недостающие множители из разложения другого числа; 4. Найти произведение получившихся множителей. <p style="text-align: center;">Найти НОК 24 и 60.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 5px;">24</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">12</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">6</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">3</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>3</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> </table> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 5px;">60</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">30</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>2</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">15</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>3</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">5</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><u>5</u></td></tr> <tr><td style="padding: 5px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black;"></td></tr> </table> </div> <p style="text-align: center;">60 = 2 • 2 • 3 • 5 24 = 2 • 2 • 3 • 2</p> <p style="text-align: center;">НОК (24; 60) = 2 • 2 • 3 • 5 • 2 = 120</p>	24	<u>2</u>	12	<u>2</u>	6	<u>2</u>	3	<u>3</u>	1		60	<u>2</u>	30	<u>2</u>	15	<u>3</u>	5	<u>5</u>	1	
48	<u>2</u>																																										
24	<u>2</u>																																										
12	<u>2</u>																																										
6	<u>2</u>																																										
3	<u>3</u>																																										
1																																											
36	<u>2</u>																																										
18	<u>2</u>																																										
9	<u>3</u>																																										
3	<u>3</u>																																										
1																																											
24	<u>2</u>																																										
12	<u>2</u>																																										
6	<u>2</u>																																										
3	<u>3</u>																																										
1																																											
60	<u>2</u>																																										
30	<u>2</u>																																										
15	<u>3</u>																																										
5	<u>5</u>																																										
1																																											
<p>Примечание 1: Если a и b <i>взаимно простые*</i> числа, то НОД(a, b)=1 Например: НОД(4,9)=1</p>	<p>Примечание 1: Если a и b <i>взаимно простые*</i> числа, то НОК(a, b)=$a \cdot b$ Например: НОК(4, 9)=4•9=36</p>																																										
<p>Примечание 2: Если a делится на b, то</p>	<p>Примечание 2: Если a делится на b, то НОК(a, b)=a</p>																																										

НОД(a,b)=b Например: НОД(120, 60)=60	Например: НОК(120, 60)=120
---	----------------------------

***Взаимно простые числа** – это те, у которых нет общих простых делителей. (Например: 4 и 9)

Примечание 1: Простые числа (1,2,3,5,7,11,13,17 и т.д.) - взаимно просты

Примечание 2: Два соседних натуральных числа (например: 24 и 25) - взаимно просты

Признаки делимости чисел

Признак делимости – это алгоритм, используя который можно сравнительно быстро определить, является ли рассматриваемое число кратным заранее заданному (т.е. делится ли на него без остатка).

Признак делимости на 2

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра является четной, т.е. также делится на два.

Примеры:

- 4, 32, 50, 112, 2174 – последние цифры этих чисел четные, значит они делятся на 2.
- 5, 11, 37, 53, 123, 1071 – не делятся на 2, т.к. их последние цифры являются нечетными.

Признак делимости на 3

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр, также, делится на три.

Примеры:

- 18 – делится на 3, т.к. $1+8=9$, а число 9 делится на 3 ($9:3=3$).
- 132 – делится на 3, т.к. $1+3+2=6$, а $6:3=2$.
- 614 – не кратно 3, т.к. $6+1+4=11$, а 11 не делится без остатка на 3 ($11:3=3\frac{2}{3}$).

Признак делимости на 4

Двухзначное число

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда сумма удвоенной цифры в разряде его десятков и цифры в разряде единиц, также, делится на четыре.

Примеры:

- 64 – делится на 4, т.к. $6\cdot 2+4=16$, а $16:4=4$.
- 35 – не делится на 4, т.к. $3\cdot 2+5=11$, а $11:4=2\frac{3}{4}$.

Число разрядов больше 2

Число кратно 4, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на четыре.

Примеры:

- 344 – делится на 4, т.к. 44 кратно 4 (по алгоритму выше: $4\cdot 2+4=12$, $12:4=3$).
- 5219 – не кратно 4, т.к. 19 не делится нацело на 4.

Примечание:

Число делится на 4 без остатка, если:

- в его последнем разряде стоят цифры 0, 4 или 8, а предпоследний разряд при этом является четным;
- в последнем разряде – 2 или 6, а в предпоследнем – нечетные цифры.

Признак делимости на 5

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра – это 0 или 5.

Примеры:

- 10, 65, 125, 300, 3480 – делятся на 5, т.к. оканчиваются на 0 или 5.
- 13, 67, 108, 649, 16793 – не делятся на 5, т.к. их последние цифры – не 0 или 5.

Признак делимости на 6

Число делится на 6 тогда и только тогда, когда он одновременно кратно и двум, и трем (см. признаки выше).

Примеры:

- 486 – делится на 6, т.к. делится на 2 (последняя цифра 6 – четная) и на 3 ($4+8+6=18$, $18:3=6$).
- 712 – не делится на 6, т.к. оно кратно только 2.
- 1345 – не делится на 6, т.к. не является кратным ни 2, ни 3.

Признак делимости на 7

Число делится на 7 тогда и только тогда, когда сумма утроенного числа его десятков и цифры в разряде единиц, также, делится на семь.

Примеры:

- 91 – делится на 7, т.к. $9 \cdot 3 + 1 = 28$, а $28:7=4$.
- 105 – делится на 7, т.к. $10 \cdot 3 + 5 = 35$, а $35:7=5$ (в числе 105 – десять десятков).
- 812 – делится на 7. Здесь следующая цепочка: $81 \cdot 3 + 2 = 245$, $24 \cdot 3 + 5 = 77$, $7 \cdot 3 + 7 = 28$, а $28:7=4$.
- 302 – не делится на 7, т.к. $30 \cdot 3 + 2 = 92$, $9 \cdot 3 + 2 = 29$, а число 29 на 7 не делится.

Признак делимости на 8

Трехзначное число

Число делится на 8 тогда и только тогда, когда сумма цифры в разряде единиц, удвоенной цифры в разряде десятков и учетверенной в разряде сотен делится на восемь.

Примеры:

- 264 – делится 8, т.к. $2 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 4 = 24$, а $24:8=3$.
- 716 – не делится 8, т.к. $7 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 6 = 36$, а $36:8=4\frac{1}{2}$.

Число разрядов больше 3

Число делится на 8, когда три последние цифры образуют число, делящееся на 8.

Примеры:

- 2336 – делится на 8, т.к. 336 кратно 8.
- 12547 – не кратно 8, т.к. 547 не делится без остатка на восемь.

Признак делимости на 9

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр, также, делится на девять.

Примеры:

- 324 – делится на 9, т.к. $3+2+4=9$, а $9:9=1$.
- 921 – не делится на 9, т.к. $9+2+1=12$, а $12:9=1\frac{1}{3}$.

Признак делимости на 10

Число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на ноль.

Примеры:

- 10, 110, 1500, 12760 – кратные 10 числа, последняя цифра – 0.
- 53, 117, 1254, 2763 – не делятся на 10.

Признак делимости на 11

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда **модуль** разности сумм четных и нечетных разрядов равен нулю или делится на одиннадцать.

Примеры:

- 737 – делится на 11, т.к. $|(7+7)-3|=11$, $11:11=1$.
- 1364 – делится на 11, т.к. $|(1+6)-(3+4)|=0$.
- 24587 – не делится на 11, т.к. $|(2+5+7)-(4+8)|=2$, а 2 не делится на 11.

Примеры.

Пример 1. Найдем все делители и кратные числа 8.

Решение:

Два делителя числа 8 очевидны. Это 1 и 8. Далее будем проверять все числа подряд начиная с 2. Получим еще два делителя: 2, 4. Таким образом, число 8 имеет 4 делителя: 1, 2, 4, 8.

Далее найдем числа кратные 8. Для этого будем последовательно умножать 8 на 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Получим следующую последовательность: 8, 16, 24, 32, 40, ... — все эти числа являются кратными 8.

Пример 2. Найдем все делители и кратные числа 36.

Решение:

Два делителя числа 36 очевидны. Это 1 и 36. Далее будем проверять все числа подряд начиная с 2. Получим следующие делителя: 2, 18, 3, 12, 4, 9, 6. Таким образом, число 36 имеет 9 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Далее найдем числа кратные 36. Для этого будем последовательно умножать 36 на 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Получим следующую последовательность: 36, 72, 108, 144, 180, ... — все эти числа кратны 36.

Пример 3. Найдем все делители и кратные числа 9.

Решение:

Два делителя числа 9 очевидны. Это 1 и 9. Далее будем проверять все числа подряд начиная с 2. Получим следующие делителя: 3. Таким образом, число 9 имеет 3 делителя: 1, 3, 9.

Далее найдем числа кратные 9. Для этого будем последовательно умножать 9 на 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Получим следующую последовательность: 9, 18, 27, 36, 45, ... — все эти числа кратны 9.

Пример 4. Найдем все делители и кратные числа 2.

Решение:

Два делителя числа 2 очевидны. Это 1 и 2. Больше делителей у числа 2 нет. Таким образом, число 2 имеет 2 делителя: 1, 2.

Далее найдем числа кратные 2. Для этого будем последовательно умножать 2 на 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Получим следующую последовательность: 2, 4, 6, 8, 10, ... — все эти числа кратны 2.

Пример 5. Найдем число делителей и кратные числа 5.

Решение:

Два делителя числа 5 очевидны. Это 1 и 5. Больше делителей у числа 5 нет. Таким образом, число 5 имеет 2 делителя: 1, 5.

Далее найдем числа кратные 5. Для этого будем последовательно умножать 5 на 1, 2, 3, 4, 5 и т.д. Получим следующую последовательность: 5, 10, 15, 20, 25, ... — все эти числа кратны 5.

Пример 6. Выбери все кратные числа 5: 1, 2, 5, 10, 15, 50, 51, 55.

Решение:

Вспомним таблицу умножения на 5

Из представленных числе кратно 5 следующие: 5, 10, 15, 50, 55.

Пример 7. Выбери все кратные числа 10: 1, 2, 5, 10, 15, 50, 70, 85.

Решение:

Вспомним таблицу умножения на 10. Из представленных числу 10 кратны следующие: 10, 50, 70.

Пример 8. Найдите НОД чисел 12 и 16

Решение:

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 16 & 2 \\
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times \cancel{3} = 4$$

Пример 9. Найдите НОК чисел 12 и 16

Решение:

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 16 & 2 \\
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

Пример 10. Найдите НОД чисел 40 и 32

Решение:

$$\begin{array}{r|l}
 40 & 2 \\
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 32 & 2 \\
 16 & 2 \\
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times \cancel{5} = 8$$

Пример 11. Найдите НОК чисел 40 и 32

Решение:

$$\begin{array}{r|l}
 40 & 2 \\
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 32 & 2 \\
 16 & 2 \\
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 2 = 160$$

Пример 12. Найдите НОД чисел 98 и 35

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\cancel{2} \times \cancel{7} \times 7 = 7$$

Пример 14. Найдите НОК чисел 98 и 35

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$2 \times 7 \times 7 \times 5 = 490$$

Решите самостоятельно

Пример 1. Найдите НОД чисел 28, 24, 76

Пример 2. Найдите НОД чисел 54 и 86

Пример 3. Найдите НОК чисел 54 и 86

Пример 4 Подчеркните числа, делящиеся:

а) на 10: 720, 123, 321, 235, 774, 600, 2003, 2004, 2005;

б) на 5: 720, 123, 321, 235, 774, 600, 2003, 2004, 2005;

в) на 2: 720, 123, 321, 235, 774, 600, 2003, 2004, 2005;

г) на 3: 720, 123, 321, 235, 774, 600, 2003, 2004, 2005;

д) на 9: 720, 123, 321, 235, 774, 600, 2003, 2004, 2005;

е) на 6: 720, 123, 321, 235, 774, 600, 2003, 2004, 2005;

ж) на 15: 720, 123, 321, 235, 774, 600, 2003, 2004, 2005.

Задание 5. С помощью цифр 2, 3, 4, 5 (без повторения) записать все трехзначные числа:

а) делящиеся на 5; б) делящиеся на 3; в) делящиеся на 9.

Задание 6. Вставить пропущенную цифру так, чтобы полученное число делилось на 2 (укажите все возможные решения):

а) 378...;	б) 111...;	в) 999...;	г) 200...;
378...;	111...;	999...;	200...;
378...;	111...;	999...;	200...;
378...;	111...;	999...;	200...;
378...;	111...;	999...;	200...

Задание 7. Вставить пропущенную цифру так, чтобы полученное число делилось на 5:

а) 378...;	б) 111...;	в) 999...;	г) 200...;
378...;	111...;	999...;	200...

Задание 8. Вставить пропущенную цифру так, чтобы полученное число делилось на 3:

- а) 679...; б) 33...5; в) 2...68; г) ...200;
679...; 33...5; 2...68; ...200;
679...; 33...5; 2...68; ...200.

Задание 9. Вставить пропущенную цифру так, чтобы полученное число делилось на 9:

- а) 123...; б) 45...8; в) 3...64; г) 7...40;
д) ...200; е) ...694; ж) ...569; з)30;
и) 954...; к) 18...9; л) 7...11; м) 99...9;
954...; 18...9; 7...11; 99...9.