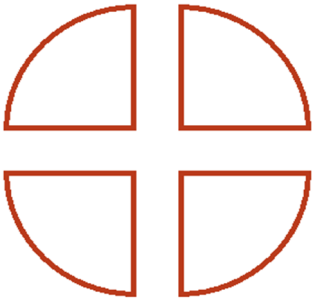


## Тема: Дробь. Правильные и неправильные дроби

### Что такое дробь?

Если говорить простым языком, то дробь это часть чего-либо. Это «чего-либо» может быть чем угодно — едой, деньгами, числом. В народе дробь называют долей. Само слово «дробь» тоже говорит за себя — дробь означает дробление, деление, разделение.

Рассмотрим пример из жизни. Мы купили себе пиццу, чтобы съесть её в течении дня. Допустим мы решили разделить её на четыре части, чтобы съесть постепенно по одному кусочку.



Посмотрите на этот рисунок. Представьте, что это наша пицца, разделённая на четыре куска. Каждый кусок пиццы это и есть дробь, потому что каждый кусок по отдельности это часть пиццы.

Допустим мы съели один кусок. Как его записать? Очень просто. Сначала рисуется маленькая линия:

—

Внизу этой линии записывается на сколько кусков пицца была разделена. Пицца была разделена на четыре куска. Значит внизу линии записывается четвёрка:

$\frac{\quad}{4}$

А сверху этой линии записывается сколько кусков пиццы было съедено. Съеден был один кусок, значит сверху записываем единицу:

$\frac{1}{4}$

Такие записи называют **дробями**. Дробь состоит из числителя и знаменателя.

Число, которое записывается сверху, называется **числителем дроби**.

Число, которое записывается снизу, называется **знаменателем дроби**.

В нашем примере числитель дроби это единица, а знаменатель дроби — четвёрка. Эту дробь можно прочесть так: «*одна четвёртая*» либо «*один кусок из четырёх*» либо «*одна четвёртая доля*» либо «*четверть*» — всё это синонимы. Теперь представьте, что мы съели ещё один кусок той же самой пиццы, которая была разделена на четыре куска. Как записать такую дробь?

Очень просто. Сверху записываем 2 (поскольку уже съедено два куска), а внизу записываем 4 (поскольку всего кусков было 4):

$$\frac{2}{4}$$

Эта дробь читается так: «*две четвёртых*» либо «*два куска из четырёх*» либо «*две четвёртые доли*».

Теперь представьте, что пиццу мы разделили не на четыре части, а на три.



Допустим мы съели один кусок этой пиццы. Как записать такую дробь?

Очень просто. Опять же рисуется маленькая линия. Внизу этой линии записывается число 3, поскольку пицца разделена на три части, а сверху этой линии записывается число 1, поскольку съеден один кусок:

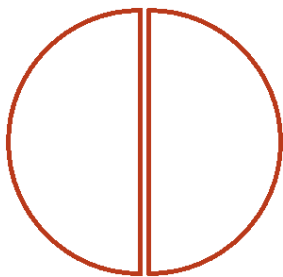
$$\frac{1}{3}$$

Эта дробь читается так: «*Одна третья*» либо «*Один кусок из трёх*» либо «*Одна третья доля*» либо «*Треть*».

Если мы съедем два куска пиццы, то такая дробь будет называться «*две третьих*» и записываться следующим образом:

$$\frac{2}{3}$$

Теперь представьте, что пиццу мы разделили на две части, или как говорят в народе: «*Пололам*»:



Допустим, из этих двух кусков мы съели один кусок. Как записать такую дробь?

Опять же рисуем линию. Внизу этой линии записываем число 2, поскольку пицца разделена на две части, а сверху записываем число 1, поскольку съеден один кусок:

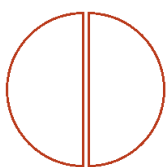
$$\frac{1}{2}$$

Эта дробь читается так: «*одна вторая*» либо «*один кусок из двух*» либо «*одна вторая доля*» либо «*половина*».

Дробь, которые мы сейчас рассмотрели, называют **обыкновенными**.

Вообще, дроби бывают двух видов: **обыкновенные** и **десятичные**. На данный момент мы рассматриваем **обыкновенные дроби**. Обыкновенная дробь это дробь, которая состоит из числителя и знаменателя. Десятичные дроби рассмотрим немного позже. Знаменатель дроби — это число, которое показывает на сколько равных частей можно что-либо разделить. Вернёмся к нашей пицце. Поровну эта пицца может быть разделена и на 2 части и на 3, и на 4, и на 5, и на 6. В зависимости от того, на сколько частей мы будем делить пиццу, знаменатель будет меняться.

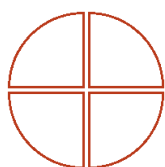
На следующем рисунке представлены три пиццы, которые разделены по-разному. У первой пиццы знаменателем будет 2. У второй пиццы знаменателем будет 3. У третьей пиццы знаменателем будет 4.



Здесь знаменателем будет 2, поскольку пицца разделена на две части



Здесь знаменателем будет 3, поскольку пицца разделена на три части



Здесь знаменателем будет 4, поскольку пицца разделена на четыре части

Числитель же показывает сколько частей взято от чего-либо. К примеру, если разделить пиццу на две части, как на первом рисунке, и взять одну часть для трапезы,

то получится что мы взяли  $\frac{1}{2}$  (*одну часть из двух*), или как говорят в народе «*половину*» пиццы.

С помощью переменных дробь можно записать так:

$$\frac{a}{b}$$

где  $a$  — это числитель,  $b$  — знаменатель.

Следующая вещь, которую важно знать это то, что обыкновенные дроби бывают **правильными** и **неправильными**.

**Правильная** дробь — это дробь, у которой числитель меньше знаменателя.

Например, следующие дроби являются правильными:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{4}{5}, \frac{3}{9}$$

Почему такие дроби называют правильными? Вспомним, что дробь это часть чего-либо. Ведь будет логичнее, если эта часть будет меньше того, откуда эта часть была

взята. Например, если пицца разделена на четыре части, и мы возьмём  $\frac{1}{4}$  (*одну четвёртую*), то наш кусок будет меньше, чем все четыре куска вместе взятые (*чем одна целая пицца*). Поэтому такие дроби называют правильными.

С неправильной дробью всё с точностью наоборот. Неправильная дробь — это дробь, у которой числитель больше знаменателя. Например, следующие дроби являются неправильными:

$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{8}{6}, \frac{9}{2}$  Видно, что у этих дробей числитель больше знаменателя. Почему же такие дроби называют неправильными? Вспомним, что дробь это часть чего-либо. Знаменатель показывает на сколько частей это чего-либо разделено. А числитель показывает сколько этого чего-либо взяли.

Теперь возьмём к примеру неправильную дробь  $\frac{9}{2}$  и применим её к нашей пицце. В знаменателе стоит 2, значит пицца разделена на две части, а в числителе стоит 9. Получается, что взято девять кусков из двух. Но как можно взять девять кусков, если их всего два? Ответ — никак. Поэтому такие дроби называют неправильными.

Дробь, у которой числитель и знаменатель одинаковые, тоже называют неправильной. Например:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$$

Вообще, такие дроби даже не должны называться дробями. И вот почему. Рассмотрим

к примеру дробь  $\frac{2}{2}$ . Применим её к нашей пицце.

Допустим, мы хотим съесть  $\frac{2}{2}$  пиццы. В знаменателе стоит число 2, значит пицца разделена на две части. И в числителе стоит 2, значит взято две части. По сути, взята вся целая пицца, и если мы съедем эту  $\frac{2}{2}$  пиццы, то съедем не часть пиццы, а всю пиццу целиком. Иными словами, съедем не дробь, а целую часть пиццы. Поэтому дробь, у которой числитель и знаменатель одинаковые, называют неправильной.

---

### Дробь означает деление

Черта в дроби, которая отделяет числитель от знаменателя, означает деление. Она говорит, что числитель можно разделить на знаменатель.

Например, рассмотрим дробь  $\frac{4}{2}$ . Дробная черта говорит, что четвёрку можно разделить на двойку. Мы знаем, что четыре разделить на два будет два. Ставим знак равенства (=) и записываем ответ:

$$\begin{array}{l} \text{Делимое} \\ \swarrow \\ \frac{4}{2} = 2 \\ \nearrow \\ \text{Делитель} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Частное} \\ \swarrow \\ 2 \end{array}$$

Можно сделать вывод, что любое деление чисел можно записать с помощью дробей. Например:

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{8}{4} = 2$$

Это простейшие примеры. Видно, что у них отсутствует остаток. С остатком немного сложнее, зато интереснее. Поговорим об этом в следующей теме, которая называется «выделение целой части дроби».

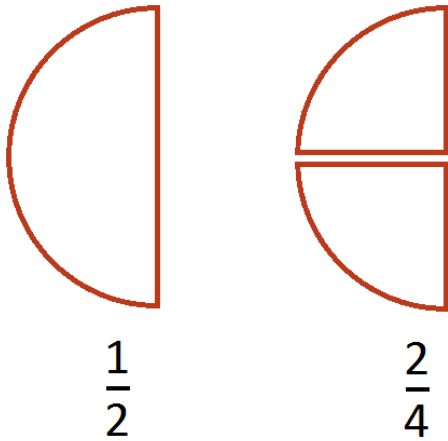
# Основное свойство дроби

Основное свойство дроби говорит о том, что если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, то получится равная ей дробь. Это означает, что значение дроби не изменится.

Например, рассмотрим дробь  $\frac{1}{2}$ . Умножим её числитель и знаменатель на одно и то же число, например на число 2

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

Получили новую дробь  $\frac{2}{4}$ . Если верить основному свойству дроби, то дроби  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{2}{4}$  равны между собой. Так ли это? Давайте проверим, нарисовав эти дроби в виде кусочков пиццы:



Посмотрите внимательно на эти два рисунка. Первый рисунок иллюстрирует дробь  $\frac{1}{2}$  (один кусок из двух), а второй иллюстрирует дробь  $\frac{2}{4}$  (два куска из четырёх). Если хорошо присмотреться на эти куски, то можно убедиться, что у них одинаковые размеры. Различие лишь в том, что разделаны они по-разному. Первая пицца была разделана на два куска, и с неё взяли один кусок. А вторая пицца была разделана на четыре куска, и с неё взяли два куска.

Поэтому между дробями  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{2}{4}$  можно поставить знак равенства (=), поскольку они равны одному и тому же значению:

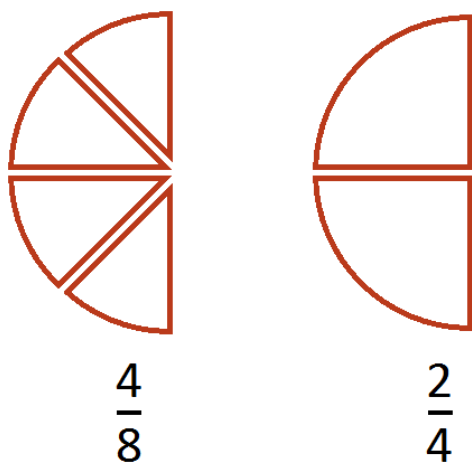
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Теперь испытаем основное свойство дроби, разделив числитель и знаменатель на одно и то же число.

Рассмотрим дробь  $\frac{4}{8}$ . Давайте разделим её числитель и знаменатель на одно и то же число, например на число 2

$$\frac{4}{8} = \frac{4:2}{8:2} = \frac{2}{4}$$

Получили новую дробь  $\frac{2}{4}$ . Если верить основному свойству дроби, то дроби  $\frac{4}{8}$  и  $\frac{2}{4}$  равны между собой. Так ли это? Давайте проверим, нарисовав эти дроби в виде кусочков пиццы:



Посмотрите внимательно на эти два рисунка. Первый рисунок иллюстрирует

дробь  $\frac{4}{8}$  (четыре куска из восьми), а второй иллюстрирует дробь  $\frac{2}{4}$  (два куска из четырёх).

Если хорошо присмотреться на эти куски, то можно убедиться, что у них одинаковые размеры. Различие лишь в том, что разделаны они по-разному. Первая пицца была разделана на восемь кусков, и с неё взяли четыре куска. А вторая пицца была разделана на четыре куска, и с неё взяли два куска.

Поэтому между дробями  $\frac{4}{8}$  и  $\frac{2}{4}$  можно поставить знак равенства (=), поскольку они равны одному и тому же значению:

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$

Теперь мы полностью проверили, как работает основное свойство дроби, и убедились, что работает оно замечательно.

Число, на которое умножается числитель и знаменатель, называется **дополнительным множителем**. Запомните это обязательно!

# Сокращение дробей

Дроби можно сокращать. Сократить — значит сделать дробь короче и проще для восприятия.

Например, дробь  $\frac{1}{2}$  выглядит намного проще и красивее, чем дробь  $\frac{20}{40}$ .

Если при решении примеров получается большая и некрасивая дробь, то нужно попытаться её сократить.

Сокращение дроби опирается на основное свойство дроби. Поэтому, прежде чем изучать сокращение дробей, обязательно изучите основное свойство дроби.

Деление числителя и знаменателя на их наибольший общий делитель называется **сокращением дроби**.

**Пример 1.** Сократить дробь  $\frac{2}{4}$

Итак, нужно разделить числитель и знаменатель дроби  $\frac{2}{4}$  на наибольший общий делитель чисел 2 и 4.

В данном случае дробь простая и для неё НОД ищется легко. НОД чисел 2 и 4 это число 2.

Значит, числитель и знаменатель дроби  $\frac{2}{4}$  надо разделить на 2

$$\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

В результате дробь  $\frac{2}{4}$  обратилась в более простую дробь  $\frac{1}{2}$ . Значение исходной дроби при этом не изменилось, поскольку сокращение подразумевает деление числителя и знаменателя на одно и то же число. А это действие, как было указано ранее, не меняет значение дроби.

До сокращения



После сокращения





$$\frac{2}{4} \quad \frac{1}{2}$$

На рисунке представлены дроби  $\frac{2}{4}$  и  $\frac{1}{2}$  в виде кусочков пиццы. До сокращения и после сокращения они имеют одинаковые размеры. Разница лишь в том, что разделены они по-разному.

---

**Пример 2.** Сократим дробь  $\frac{20}{40}$

Чтобы сократить дробь  $\frac{20}{40}$ , нужно числитель и знаменатель этой дроби разделить на наибольший общий делитель чисел 20 и 40.

НОД чисел 20 и 40 это число 20. Поэтому делим числитель и знаменатель дроби  $\frac{20}{40}$  на 20

$$\frac{20}{40} = \frac{20 : 20}{40 : 20} = \frac{1}{2}$$

---

**Пример 3.** Сократим дробь  $\frac{32}{36}$

Чтобы сократить дробь  $\frac{32}{36}$ , нужно числитель и знаменатель этой дроби разделить на наибольший общий делитель чисел 32 и 36.

НОД чисел 32 и 36 это число 4. Поэтому делим числитель и знаменатель дроби  $\frac{32}{36}$  на 4

$$\frac{32}{36} = \frac{32 : 4}{36 : 4} = \frac{8}{9}$$

Если в числителе и знаменателе располагаются простые числа, то такую дробь сократить нельзя — она не сокращается. Такие дроби называют **несократимыми**. Например, следующие дроби являются несократимыми:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{13}$$

Напомним, что простыми называются числа, которые делятся только на единицу и самих себя.

## Второй способ сокращения дроби

Второй способ является короткой версией первого способа. Суть его заключается в том, что пропускается подробное разъяснение того, на что был разделён числитель и знаменатель.

32

К примеру, вернёмся к дроби 36. Эту дробь мы сократили на 4, то есть разделили числитель и знаменатель этой дроби на число 4

$$\frac{32}{36} = \frac{32:4}{36:4} = \frac{8}{9}$$

32:4

Теперь представьте, что в данном выражении отсутствует конструкция 36:4, и сразу записан ответ  $\frac{8}{9}$ . Получится следующее выражение:

$$\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Суть в том что число, на которое разделили числитель и знаменатель, хранят в уме. В нашем случае числитель и знаменатель делят на 4 — это число и будем хранить в уме.

Сначала делим числитель на число 4. Полученный ответ записываем рядом с числителем, предварительно зачеркнув его:

$$\begin{array}{r} 8 \\ \cancel{32} \\ \hline 36 \end{array}$$

Затем таким же образом делим знаменатель на число 4. Полученный ответ записываем рядом со знаменателем, предварительно зачеркнув его:

$$\begin{array}{r} 8 \\ \cancel{32} \\ \hline \cancel{36} \\ 9 \end{array}$$

Затем собираем новую дробь. В числитель отправляем новое число 8 вместо 32, а в знаменатель отправляем новое число 9 вместо 36

$$\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Происходит своего рода замена одной дроби на другую. Значение новой дроби равно значению предыдущей дроби, поскольку срабатывает основное свойство дроби, которое говорит о том что если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, то получится равная ей дробь.

Также, дроби можно сокращать, предварительно разложив на простые множители числитель и знаменатель.

Например, сократим дробь  $\frac{9}{27}$ , предварительно разложив на простые множители числитель и знаменатель:

$$\frac{9}{27} = \frac{3 \times 3}{3 \times 3 \times 3}$$

Итак, мы разложили числитель и знаменатель дроби  $\frac{9}{27}$  на множители. Теперь применяем второй способ сокращения. В числителе и в знаменателе выбираем по множителю и делим выбранные множители на НОД этих множителей.

Давайте сократим по тройке в числителе и в знаменателе. Для этого разделим эти тройки на 3

$$\frac{9}{27} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times 3}{\cancel{3} \times 3 \times 3}$$

(на их наибольший общий делитель). Получим следующее выражение:

Сократить можно ещё по тройке в числителе и в знаменателе:

$$\frac{9}{27} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 3}$$

Дальше сокращать больше нечего. Последнюю тройку в знаменателе просто так сократить нельзя, поскольку в числителе нет множителя, который можно было бы сократить вместе с этой тройкой.

Записываем новую дробь, в числителе и в знаменателе которой будут новые множители.

$$\frac{9}{27} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{1} \times \frac{3}{1} \times 3} = \frac{1 \times 1}{1 \times 1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Получили ответ  $\frac{1}{3}$ . Значит, при сокращении дроби  $\frac{9}{27}$  получается новая дробь  $\frac{1}{3}$ .

Не рекомендуется пользоваться вторым способом сокращения дроби и способом разложения на простые множители числителя и знаменателя, если человек только начал изучать математику. Практика показывает, что это оказывается сложным на первых этапах.

Поэтому, если испытываете затруднения при использовании второго способа, то пользуйтесь старым добрым способом сокращения: делите числитель и знаменатель дроби на их наибольший общий делитель. Выражение в таком случае получается простым, понятным и красивым. Так, предыдущий пример может быть решён старым способом и будет выглядеть так:

$$\frac{9}{27} = \frac{9:9}{27:9} = \frac{1}{3}$$

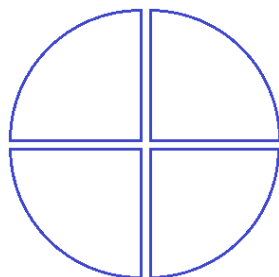
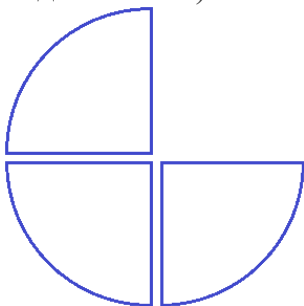
Сравните это выражение с выражением, которое мы получили, когда пользовались вторым способом:

$$\frac{9}{27} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{1} \times \frac{3}{1} \times 3} = \frac{1 \times 1}{1 \times 1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Первое выражение намного понятнее, аккуратнее и короче. Не правда ли?

## Задания для самостоятельного решения

**Задание 1.** А) Запишите в виде дроби следующий рисунок:



**Задание 2.** Выделите целые части в следующих дробях:

$$a) \frac{10}{7} \quad b) \frac{15}{4} \quad c) \frac{20}{8} \quad d) \frac{22}{6} \quad e) \frac{27}{6} \quad f) \frac{13}{3}$$

**Задание 3.** Выделите целые части в следующих дробях:

$$a) \frac{16}{10} \quad b) \frac{18}{9} \quad c) \frac{20}{5} \quad d) \frac{42}{8} \quad e) \frac{53}{20} \quad f) \frac{64}{8}$$

**Задание 4.** Сократите следующие дроби:

$$a) \frac{3}{18} \quad b) \frac{4}{12} \quad c) \frac{12}{16} \quad d) \frac{8}{24} \quad e) \frac{6}{18} \quad f) \frac{9}{15}$$

**Задание 5.** Сократите следующие дроби вторым способом:

$$a) \frac{7}{35} \quad b) \frac{2}{10} \quad c) \frac{32}{36} \quad d) \frac{9}{36} \quad e) \frac{15}{45} \quad f) \frac{12}{60}$$