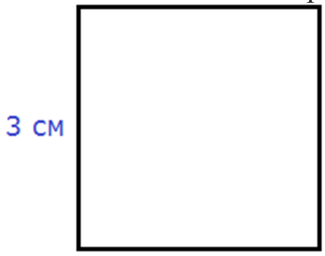
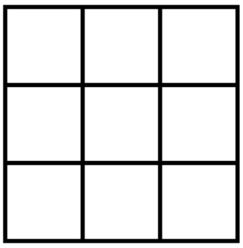
Основные сведения

Чтобы найти площадь квадрата, нужно длину его стороны возвести во вторую степень.
Найдём площадь квадрата, длина стороны которого 3 см



$S = 3^2 = 9$ см^2



Теперь решим обратную задачу. А именно, зная площадь квадрата определим длину его стороны. Для этого воспользуемся таким инструментом как **ко́рень**. Корень бывает квадратный, кубический, а также *n*-й степени.
Сейчас наш интерес вызывает **квадратный корень**. По другому его называют **ко́рнем второй степени**.
Для нахождения длины стороны нашего квадрата, нужно найти число, вторая степень которого равна 9. Таковым является число 3. Это число и является **ко́рнем**.
Введём для работы с корнями новые обозначения.
Символ ко́рня выглядит как $\sqrt{}$. Это по причине того, что слово *корень* в математике употребляется как *радикал*. А слово *радикал* происходит от латинского *radix* (что в переводе означает корень). Первая буква слова *radix* это *r* впоследствии преобразилась в символ корня $\sqrt{}$.
Под корнем располага́ют подкоренно́е выражение. В нашем случае подкоренным выражением будет число 9 (площадь квадрата)

$$\sqrt{9}$$

Нас интересовал квадратный корень (он же корень второй степени), поэтому слева над корнем указываем число 2. Это число называют показателем корня (или степенью корня)

$$\sqrt[2]{9}$$

Получили выражение, которое читается так: «*квадратный корень из числа* 9». С этого момента возникает новая задача по поиску само́го корня.
Если число 3 возвести во вторую степень, то получится число 9. Поэтому число 3 и будет ответом:

$$\sqrt[2]{9} = 3$$

Значит квадрат площадью 9 см^2 имеет сторону, длина которой 3 см. Приведённое действие называют **извлече́нием квадра́тного ко́рня**.
Нетрудно догадаться, что квадратным корнем из числа 9 также является отрицательное число −3. При его возведении во вторую степень тоже получается число 9

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$$

Получается, что выражение $\sqrt[2]{9}$ имеет два значения: 3 и −3. Но длина стороны квадрата не может быть отрицательным числом, поэтому для нашей задачи ответ будет только один, а именно 3.
Вообще, квадратный корень имеет два противоположных значения: положительное и отрицательное.
Например, извлечём квадратный корень из числа 4

$$\sqrt[2]{4}$$

Это выражение имеет два значения: 2 и −2, поскольку при возведении этих чисел во вторую степень, получится один и тот же результат 4

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$$

Поэтому ответ к выражению вида $\sqrt[2]{a}$ записывают с плюсом и минусом. Плюс с минусом означает, что квадратный корень имеет два противоположных значения.

Запишем ответ к выражению $\sqrt[2]{4}$ с плюсом и минусом:

$$\sqrt[2]{4} = \pm 2$$

Определения

Дадим определение квадратному корню.
Квадратным корнем из числа *a* называют такое число *b*, вторая степень которого равна *a*.
То есть число *b* должно быть таким, чтобы выполнялось равенство $b^2 = a$. Число *b* (оно же корень) обозначается через радикал $\sqrt[2]{a}$ так, что $b = \sqrt[2]{a}$. На практике левая и правая часть поменяны местами и мы видим привычное выражение $\sqrt[2]{a} = b$
Например, квадратным корнем из числá 16 есть число 4, поскольку число 4 во второй степени равно 16

$$4^2 = 16$$

Корень 4 можно обозначить через радикал $\sqrt[2]{16}$ так, что $4 = \sqrt[2]{16}$.
Также квадратным корнем из числá 16 есть число −4, поскольку число −4 во второй степени равно 16

$$(-4)^2 = 16$$

Если при решении задачи интересует только положительное значение, то корень называют не просто квадратным, а **арифметическим квадратным**.
Арифметический квадратный корень из числá *a* — это неотрицательное число *b* ($b \geq 0$), при котором выполняется равенство $b^2 = a$.
В нашем примере квадратными корнями из числá 16 являются корни 4 и −4, но арифметическим из них является только корень 4.
В разговорном языке можно использовать сокращение. К примеру, выражение $\sqrt[2]{16}$ полностью читается так: *«квадратный корень из числá шестнадцать»*, а в сокращённом варианте можно прочитать так: *«корень из шестнадцати»*.
Не следует путать понятия *корень* и *квадрат*. Квадрат это число, которое получилось в результате возведения какого-нибудь числá во вторую степень. Например, числа 25, 36,

49 являются квадратами, потому что они получились в результате возведения во вторую степень чисел 5, 6 и 7 соответственно.
Корнями же являются числа 5, 6 и 7. Они являются теми числами, которые во второй степени равны 25, 36 и 49 соответственно.
Чаще всего в квадратных корнях показатель ко́рня вообще не указывается. Так, вместо записи $\sqrt[2]{9}$ можно использовать запись $\sqrt{9}$. Если в учебнике по математике встретится корень без показателя, то нужно понимать, что это квадратный корень.
Квадратный корень из единицы равен единице. То есть справедливо следующее равенство:

$$\sqrt[2]{1} = 1$$

Это по причине того, что единица во второй степени равна единице:

$$1^2 = 1$$

и квадрат, состоящий из одной квадратной единицы, имеет сторону, равную единице:

Квадратный корень из нуля равен нулю. То есть справедливо равенство $\sqrt{0} = 0$, поскольку $0^2 = 0$.

Выражение вида $\sqrt{-a}$ смысла не имеет. Например, не имеет смысла выражение $\sqrt{-4}$, поскольку вторая степень любого числа есть число положительное. Невозможно найти число, вторая степень которого будет равна −4.

Если выражение вида $\sqrt{a}$ возвести во вторую степень, то есть если записать $(\sqrt{a})^2$, то это выражение будет равно подкоренно́му выражению a

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Например, выражение $(\sqrt{4})^2$ равно 4

$$(\sqrt{4})^2 = 4$$

Это потому что выражение $\sqrt{4}$ равно значению 2. Но это значение сразу возво́дится во вторую степень и получается результат 4.
Еще примеры:

$$(\sqrt{9})^2 = 9$$

$$(\sqrt{16})^2 = 16$$

$$(\sqrt{25})^2 = 25$$

Корень из квадрата числа́ равен модулю этого числа́:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Например, корень из числа́ 5, возведённого во вторую степень, равен модулю числа́ 5

$$\sqrt{5^2} = |5| = 5$$

Если во вторую степень возво́дится отрицательное число, ответ опять же будет положительным. Например, корень из числа́ −5, возведённого во вторую степень, равен модулю числа́ −5. А модуль числа −5 равен 5

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

Действительно, если не пользуясь правилом $\sqrt{a^2} = |a|$, вычислять выражение $\sqrt{(-5)^2}$ обычным методом — сначала возвести число −5 во вторую степень, затем извлечь полученный результат, то полу́чим ответ 5

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Не следует путать правило $\sqrt{a^2} = |a|$ с правилом $(\sqrt{a})^2 = a$.

Правило $\sqrt{a^2} = |a|$ верно при любом *a*, тогда как правило $(\sqrt{a})^2 = a$ верно в том случае, если выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл.

В некоторых учебниках знак корня может выглядеть без верхней линии. Выглядит это так:

√

Примеры: √4, √9, √16.

Ме́ньшему числу соответствует ме́ньший корень, а бо́льшему числу соответствует бо́льший корень.

Например, рассмотрим числа 49 и 64. Число 49 меньше, чем число 64.

$$49 < 64$$

Если извлечь квадратные корни из этих чисел, то числу 49 будет соответствовать меньший корень, а числу 64 — бо́льший. Действительно, $\sqrt{49} = 7$, а $\sqrt{64} = 8$,

$$\sqrt{49} < \sqrt{64}$$

Отсюда:

$$7 < 8$$

Примеры извлечения квадратных корней

Рассмотрим несколько простых примеров на извлечение квадратных корней.

Пример 1. Извлечь квадратный корень $\sqrt{36}$

Данный квадратный корень равен числу, квадрат которого равен 36. Таковым является число 6, поскольку $6^2 = 36$

$$\sqrt{36} = 6$$

Пример 2. Извлечь квадратный корень $\sqrt{49}$

Данный квадратный корень равен числу, квадрат которого равен 49. Таковым является число 7, поскольку $7^2 = 49$

$$\sqrt{49} = 7$$

В таких простых примерах достаточно знать таблицу умножения. Так, мы помним, что число 49 входит в таблицу умножения на семь. То есть:

$$7 \times 7 = 49$$

Но 7×7 это 7^2

$$7^2 = 49$$

Отсюда, $\sqrt{49} = 7$.

Пример 3. Извлечь квадратный корень $\sqrt{100}$

Данный квадратный корень равен числу, квадрат которого равен 100. Таковым является число 10, поскольку $10^2 = 100$

$$\sqrt{100} = 10$$

Число 100 это последнее число, корень которого можно извлечь с помощью таблицы умножения. Для чисел, бóльших 100, квадратные корни можно находить с помощью таблицы квадратов.

Пример 3. Извлечь квадратный корень $\sqrt{256}$

Данный квадратный корень равен числу, квадрат которого равен 256. Чтобы найти это число, воспользуемся таблицей квадратов.

Нахóдим в таблице квадратов число 256 и двигаясь от него влево и вверх определяем цифры, которые образуют число, квадрат которого равен 256.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Видим, что это число 16. Значит $\sqrt{256} = 16$.

Пример 4. Найти значение выражения $2\sqrt{16}$

В данном примере число 2 умножается на выражение с корнем. Сначала вычислим корень $\sqrt{16}$, затем перемнóжим его с числом 2

$$2\sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$$

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x} = 4$

В данном примере нужно найти значение переменной *x,* при котором левая часть будет равна 4.

Значение переменной *x* равно 16, поскольку $\sqrt{16} = 4$. Значит корень уравнения равен 16.

$$\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$4 = 4$$

Примечание. Не следует путать *корень уравнения* и *квадратный корень*. Корень уравнения это значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство. А квадратный корень это число, вторая степень которого равна выражению, находящемуся под радикалом $\sqrt{\ }$.

Подобные примеры решают, пользуясь определением квадратного корня. Давайте и мы поступим так же.

Из определения мы знаем, что квадратный корень $\sqrt{a}$ равен числу b, при котором выполняется равенство $b^2 = a$.

$$\sqrt{a} = b, \quad b^2 = a$$

Применим равенство $b^2 = a$ к нашему примеру $\sqrt{x} = 4$. Роль переменной b у нас играет число 4, а роль переменной a — выражение, находящееся под корнем $\sqrt{x}$, а именно переменная x

$$\sqrt{x} = 4, \quad 4^2 = x$$

В выражении $4^2 = x$ вычислим левую часть, полу́чим $16 = x$. Поменяем левую и правую часть местами, полу́чим $x = 16$. В результате приходим к тому, что нашлось значение переменной x.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x} - 8 = 0$

Перенесем −8 в правую часть, изменив знак:

$$\sqrt{x} = 8$$

Возведем правую часть во вторую степень и приравняем её к переменной x

$$8^2 = x$$

Вычислим правую часть, полу́чим $64 = x$. Поменяем левую и правую часть местами, полу́чим $x = 64$. Значит корень уравнения $\sqrt{x} - 8 = 0$ равен 64

$$\sqrt{x} - 8 = 0$$

$$\sqrt{64} - 8 = 0$$

$$8 - 8 = 0$$

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{3 + 5x} = 7$

Воспользуемся определением квадратного корня:

$$\sqrt{a} = b, \quad b^2 = a$$

Роль переменной b играет число 7, а роль переменной a — подкоренно́е выражение $3 + 5x$. Возведем число 7 во вторую степень и приравняем его к $3 + 5x$

$$\sqrt{3 + 5x} = 7, \quad 7^2 = 3 + 5x$$

В выражении $7^2 = 3 + 5x$ вычислим левую часть полу́чим $49 = 3 + 5x$. Получилось обычное линейное уравнение. Решим его:

$$49 = 3 + 5x$$
$$49 - 3 = 5x$$
$$46 = 5x$$
$$\frac{46}{5} = \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}$$
$$\frac{46}{5} = x$$
$$x = \frac{46}{5}$$

Корень уравнения $\sqrt{3+5x} = 7$ равен $\frac{46}{5}$. Выполним проверку, подставив его в исходное уравнение:

$$\sqrt{3+5x} = 7$$
$$\sqrt{3+\cancel{5}\times\frac{46}{\cancel{5}}} = 7$$
$$\sqrt{3+46} = 7$$
$$\sqrt{49} = 7$$
$$7 = 7$$

Пример 10. Найти значение выражения $2\sqrt{49}$

В этом выражении число 2 умножается на квадратный корень из числа 49.

Сначала нужно извлечь квадратный корень и перемножить его с числом 2

$$2\sqrt{49} = 2 \times 7 = 14$$

Приближённое значение квадратного корня

Не каждый квадратный корень можно извлечь. Извлечь квадратный корень можно только в том случае, если удаётся найти число, вторая степень которого равна подкореннóму выражению.

Например, извлечь квадратный корень $\sqrt{64}$ можно, потому что удаётся найти число, вторая степень которого равна подкореннóму выражению. Таковым является число 8, поскольку $8^2 = 64$. То есть $\sqrt{64} = 8$

А извлечь квадратный корень $\sqrt{3}$ нельзя, потому что невозможно найти число, вторая степень которого равна 3. В таком случае говорят, что квадратный корень из числа 3 не извлекается.

Зато можно извлечь квадратный корень из числа 3 **приближённо**. Извлечь квадратный корень приближённо означает найти значение, которое при возведении во вторую степень будет максимально близко к подкореннóму выражению.

Приближённое значение ищут с определенной точностью: *с точностью до целых, с точностью до десятых, с точностью до сотых* и так далее.

Найдём значение корня $\sqrt{3}$ приближённо с точностью до десятых. Словосочетание *«с точностью до десятых»* говорит о том, что приближённое значение корня $\sqrt{3}$ будет представлять собой десятичную дробь, у которой после запятой одна цифра.
Для начала найдём ближайшее меньшее число, корень которого можно извлечь. Таковым является число 1. Корень из этого числа равен самому этому числу:

$$\sqrt{1} = 1$$

Аналогично находим ближайшее бóльшее число, корень которого можно извлечь. Таковым является число 4. Корень из этого числа равен 2

$$\sqrt{4} = 2$$

$\sqrt{1}$ меньше, чем $\sqrt{4}$

$$\sqrt{1} < \sqrt{4}$$

А $\sqrt{3}$ больше, чем $\sqrt{1}$ но меньше, чем $\sqrt{4}$. Запишем это в виде двойного неравенства:

$$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$$

Точные значения корней $\sqrt{1}$ и $\sqrt{4}$ известны. Это числа 1 и 2

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

Тогда очевидно, что значение корня $\sqrt{3}$ будет представлять собой десятичную дробь, потому что между числами 1 и 2 нет целых чисел.
Для нахождения приближённого значения квадратного корня $\sqrt{3}$ будем проверять десятичные дроби, располагающиеся в интервале от 1 до 2, возводя их в квадрат. Делать это будем до тех пор пока не полу́чим значение, максимально близкое к 3. Проверим к примеру дробь 1,1

$$1{,}1^2 = 1{,}21$$

Получился результат 1,21, который не очень близок к подкоренно́му выражению 3. Значит 1,1 не годится в качестве приближённого значения квадратного корня $\sqrt{3}$, потому что оно мало́.
Проверим тогда дробь 1,8

$$1{,}8^2 = 3{,}24$$

Получился результат 3,24, который близок к подкоренно́му выражению, но превосходит его на 0,24. Значит 1,8 не годится в качестве приближенного значения корня $\sqrt{3}$, потому что оно велико́.
Проверим тогда дробь 1,7

$$1{,}7^2 = 2{,}89$$

Получился результат 2,89, который уже близок к подкоренно́му выражению. Значит 1,7 и будет приближённым значением квадратного корня $\sqrt{3}$. Напомним, что знак приближенного значения выглядит как $\approx$

$$\sqrt{3} \approx 1{,}7$$

Значение 1,6 проверять не нужно, потому что в результате получится число 2,56, которое дальше от трёх, чем значение 2,89. А значение 1,8, как было показано ранее, является уже большим.
В данном случае мы нашли приближенное значение корня $\sqrt{3}$ с точностью до десятых. Значение можно получить ещё более точно. Для этого его следует находить с точностью до сотых.
Чтобы найти значение с точностью до сотых проверим десятичные дроби в интервале от 1,7 до 1,8

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

Проверим дробь 1,74

$$1{,}74^2 = 3{,}0276$$

Получился результат 3,0276, который близок к подкоренно́му выражению, но превосходит его на 0,0276. Значит значение 1,74 велико́ для корня $\sqrt{3}$.
Проверим тогда дробь 1,73

$$1{,}73^2 = 2{,}9929$$

Получился результат 2,9929, который близок к подкоренно́му выражению $\sqrt{3}$. Значит 1,73 будет приближённым значением квадратного корня $\sqrt{3}$ с точностью до сотых.
Процесс нахождения приближённого значения квадратного корня продолжается бесконечно.
Так, корень $\sqrt{3}$ можно находить с точностью до тысячных, десятитысячных и так далее:
$\sqrt{3} = 1{,}732$ (вычислено с точностью до тысячных)

$\sqrt{3} = 1,7320$ (вычислено с точностью до десятитысячных)
$\sqrt{3} = 1,73205$ (вычислено с точностью до ста тысячных).
Ещё квадратный корень можно извлечь с точностью до целых. Приближённое значение квадратного корня $\sqrt{3}$ с точностью до целых равно единице:

$$\sqrt{3} \approx 1$$

Значение 2 будет слишком большим, поскольку при возведении этого числа во вторую степень получается число 4, которое больше подкоренного выражения. Нас же интересуют значения, которые при возведении во вторую степень равны подкоренно́му выражению или максимально близки к нему, но не превосходят его.
В зависимости от решаемой задачи допускается находить значение, вторая степень которого больше подкоренного выражения. Это значение называют приближённым значением квадратного корня с избытком. Поговорим об этом подробнее.

Приближенное значение квадратного корня с недостатком или избытком

Иногда можно встретить задание, в котором требуется найти приближённое значение корня с недостатком или избытком.
В предыдущей теме мы нашли приближённое значение корня $\sqrt{3}$ с точностью до десятых с недостатком. Недостаток понимается в том смысле, что до значения 3 нам недоставало ещё некоторых частей. Так, найдя приближённое значение $\sqrt{3}$ с точностью до десятых, мы получили 1,7. Это значение является значением с недостатком, поскольку при возведении этого числа во вторую степень полу́чим результат 2,89. Этому результату недостаёт ещё 0,11 чтобы получить число 3. То есть, $2,89 + 0,11 = 3$.
С избытком же называют приближённые значения, которые при возведении во вторую степень дают результат, который превосходит подкоренно́е выражение. Так, вычисляя корень $\sqrt{3}$ приближённо, мы проверили значение 1,8. Это значение является приближённым значением корня $\sqrt{3}$ с точностью до десятых с избытком, поскольку при возведении 1,8 во вторую степень, получаем число 3,24. Этот результат превосходит подкоренно́е выражение на 0,24. То есть $3,24 - 3 = 0,24$.
Приближённое значение квадратного корня $\sqrt{3}$ с точностью до целых тоже был найден с недостатком:

$$\sqrt{3} \approx 1$$

Это потому что при возведении единицы в квадрат получаем единицу. То есть до числа 3 недостаёт ещё 2.
Приближённое значение квадратного корня $\sqrt{3}$ с точностью до целых можно найти и с избытком. Тогда этот корень приближённо будет равен 2

$$\sqrt{3} \approx 2$$

Это потому что при возведении числа 2 в квадрат получаем 4. Число 4 превосходит подкоренно́е выражение 3 на единицу. Извлекая приближённо квадратный корень с избытком желательно уточнять, что корень извлечен именно с избытком:

$$\sqrt{3} \approx 2 \ (\textit{с избытком})$$

Потому что приближённое значение чаще всего ищется с недостатком, чем с избытком.
Дополнительно следует упомянуть, что в некоторых учебниках словосочетания *«с точностью до целых», «с точностью до десятых», с «точностью до сотых»*, заменяют на словосочетания *«с точностью до* 1*»*, *«с точностью до* 0,1*»*, *«с точностью до* 0,01*»* соответственно.
Так, если в задании сказано извлечь квадратный корень из числа 5 с точностью до 0,01, то это значит что корень следует извлекать приближённо с точностью до сотых:

$$\sqrt{5} \approx 2,23$$

Пример 2. Извлечь квадратный корень из числа 51 с точностью до 1

$$\sqrt{51} \approx 7$$

Пример 3. Извлечь квадратный корень из числа 51 с точностью до 0,1

$$\sqrt{51} \approx 7,1$$

Пример 4. Извлечь квадратный корень из числа 51 с точностью до 0,01

$$\sqrt{51} \approx 7,14$$

Границы, в пределах которых располагаются корни

Если исходное число принадлежит промежутку [1; 100], то квадратный корень из этого исходного числа будет принадлежать промежутку [1; 10].

Например, пусть исходным числом будет 64. Данное число принадлежит промежутку [1; 100]. Сразу делаем вывод, что квадратный корень из числа 64 будет принадлежать промежутку [1; 10]. Теперь вспоминаем таблицу умножения. Какое перемножение двух одинаковых сомножителей даёт в результате 64? Ясно, что перемножение 8×8, а это есть $8^2 = 64$. Значит квадратный корень из числа 64 есть 8

$$\sqrt{64} = 8$$

Пример 2. Извлечь квадратный корень из числа 49

Число 49 принадлежит промежутку [1; 100]. Значит квадратный корень будет принадлежать промежутку [1; 10]. Этим корнем будет число 7, поскольку $7^2 = 49$

$$\sqrt{49} = 7$$

Пример 2. Извлечь квадратный корень из числа 1

Число 1 принадлежит промежутку [1; 100]. Значит квадратный корень будет принадлежать промежутку [1; 10]. Этим корнем будет число 1, поскольку $1^2 = 1$

$$\sqrt{1} = 1$$

Пример 3. Извлечь квадратный корень из числа 100

Число 100 принадлежит промежутку [1; 100]. Значит квадратный корень будет принадлежать промежутку [1; 10]. Этим корнем будет число 10, поскольку $10^2 = 100$

$$\sqrt{100} = 10$$

Понятно, что промежуток [1; 100] содержит ещё и числа, квадратные корни из которых не извлекаются. Для таких чисел корень нужно извлекать приближённо. Тем не менее, приближённый корень тоже будет располагаться в пределах промежутка [1; 10].

Например, извлечём квадратный корень из числа 37. Нет целого числа, вторая степень которого была бы равна 37. Поэтому извлекать квадратный корень следует приближённо. Извлечём его к примеру с точностью до сотых:

$$\sqrt{37} \approx 6{,}08$$

Для облегчения можно находить ближайшее меньшее число, корень из которого извлекается. Таковым в данном примере было число 36. Квадратный корень из него равен 6. И далее отталкиваясь от числа 6, можно находить приближённое значение корня $\sqrt{37}$, проверяя различные десятичные дроби, целая часть которых равна 6.

Квадраты чисел от 1 до 10 обязательно нужно знать наизусть. Ниже представлены эти квадраты:

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 4$$
$$3^2 = 9$$
$$4^2 = 16$$
$$5^2 = 25$$
$$6^2 = 36$$
$$7^2 = 49$$
$$8^2 = 64$$
$$9^2 = 81$$
$$10^2 = 100$$

И обратно, следует знать значения квадратных корней этих квадратов:

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{100} = 10$$

Если к любому числу от 1 до 10 в конце дописать ноль (или несколько нулей), и затем возвести это число во вторую степень, то в полученном числе будет в два раза больше нулей.
Например, $6^2 = 36$. Допишем к числу 6 один ноль, полу́чим 60. Возведём число 60 во вторую степень, полу́чим 3600

$$60^2 = 3600$$

А если к числу 6 дописать два нуля, и возвести это число во вторую степень, то полу́чим число, в котором четыре нуля. То есть в два раза больше нулей:

$$600^2 = 360000$$

Тогда можно сделать следующий вывод:
Если исходное число содержит знакомый нам квадрат и чётное количество нулей, то можно извлечь квадратный корень из этого числа. Для этого следует извлечь корень из знакомого нам квадрата и затем записать половину количества нулей из исходного числа.
Например, извлечём квадратный корень из числа 900. Видим, что в данном числе есть знакомый нам квадрат 9. Извлекаем из него корень, получаем 3

$$\sqrt{900} = 3$$

Теперь из исходного числа записываем половину от количества нулей. В исходном числе 900 содержится два нуля. Половина этого количества нулей есть один ноль. Записываем его в ответе после цифры 3

$$\sqrt{900} = 30$$

Пример 2. Извлечём квадратный корень из числа 90000
Здесь опять же имеется знакомый нам квадрат 9 и чётное количество нулей. Извлекаем корень из числа 9 и записываем половину от количества нулей. В исходном числе содержится четыре нуля. Половиной же этого количества нулей будет два нуля:

$$\sqrt{900\cancel{00}} = 300$$

Пример 3. Извлечем квадратный корень из числа 36000000
Здесь имеется знакомый нам квадрат 36 и чётное количество нулей. Извлекаем корень из числа 36 и записываем половину от количества нулей. В исходном числе шесть нулей. Половиной же будет три нуля:

$$\sqrt{36000\cancel{000}} = 6000$$

Пример 4. Извлечем квадратный корень из числа 2500

Здесь имеется знакомый нам квадрат 25 и чётное количество нулей. Извлекаем корень из числа 25 и записываем половину от количества нулей. В исходном числе два нуля. Половиной же будет один ноль:

$$\sqrt{250\cancel{0}} = 50$$

Если подкоренно́е число увеличить (или уменьшить) в 100, 10000 то корень увеличится (или уменьшится) в 10, 100 раз соответственно.

Например, $\sqrt{49} = 7$. Если увеличим подкоренно́е число в 100 раз, то квадратный корень увеличится в 10 раз:

$$\sqrt{4900} = 70$$

И наоборот, если в равенстве $\sqrt{49} = 7$ уменьшим подкоренно́е число в 100 раз, то квадратный корень уменьшится в 10 раз:

$$\sqrt{0,49} = 0,7$$

Пример 2. Увеличим в равенстве $\sqrt{4900} = 70$ подкоренно́е число в 10000, тогда квадратный корень 70 увеличиться в 100 раз

$$\sqrt{49000000} = 7000$$

Пример 3. Уменьшим в равенстве $\sqrt{4900} = 70$ подкоренно́е число в 100 раз, тогда квадратный корень 70 уменьшится в 10 раз

$$\sqrt{49} = 7$$

Эта закономерность позволяет извлечь квадратный корень из десятичной дроби, если в данной дроби после запятой соде́ржатся две цифры, и эти две цифры образуют знакомый нам квадрат. В таких случаях данную десятичную дробь следует умножить на 100. Затем извлечь квадратный корень из получившегося числа и уменьшить подкоренно́е число в сто раз.
Например, извлечём квадратный корень из числа 0,25. В данной десятичной дроби после запятой содержатся две цифры и эти две цифры образуют знакомый нам квадрат 25. Умно́жим десятичную дробь 0,25 на 100, полу́чим 25. А из числа 25 квадратный корень извлекается легко:

$$\sqrt{25} = 5$$

Но нам изначально нужно было извлечь корень из 0,25, а не из 25. Чтобы исправить ситуацию, вернём нашу десятичную дробь. Если в равенстве $\sqrt{25} = 5$ подкоренно́е число уменьшить в 100 раз, то полу́чим под корнем 0,25 и соответственно ответ уменьшится в 10 раз:

$$\sqrt{0,25} = 0,5$$

Обычно в таких случаях достаточно уметь передвига́ть запятую. Потому что сдвинуть в числе запятую вправо на две цифры это всё равно что умножить это число на 100.
В предыдущем примере в подкоренном числе 0,25 можно было сдвинуть запятую вправо **на две цифры**, а в полученном ответе сдвинуть её влево **на одну цифру.**
Например, извлечем корень из числа 0,81. Мысленно передвинем запятую вправо на две цифры, полу́чим 81. Теперь извлечём квадратный корень из числа 81, полу́чим ответ 9. В ответе 9 передвинем запятую влево на одну цифру, полу́чим 0,9. Значит, $\sqrt{0,81} = 0,9$.
Это правило работает и в ситуации, когда после запятой содержатся четыре цифры и эти цифры образуют знакомый нам квадрат.
Например, десятичная дробь 0,1225 содержит после запятой четыре цифры. Эти четыре цифры образуют число 1225, квадратный корень из которого равен 35.

Тогда можно извлечь квадратный корень и из 0,1225. Умнóжим данную десятичную дробь на 10000, полýчим 1225. Из числа 1225 квадратный корень можно извлечь с помощью таблицы квадратов:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

$$\sqrt{1225} = 35$$

Но нам изначально нужно было извлечь корень из 0,1225, а не из 1225. Чтобы исправить ситуацию, в равенстве $\sqrt{1225} = 35$ подкореннóе число уменьшим в 10000 раз. В результате под корнем образуется десятичная дробь 0,1225, а правая часть уменьшится в 100 раз

$$\sqrt{0{,}1225} = 0{,}35$$

Эта же закономерность будет работать и при извлечении корней из дробей вида 12,25. Если цифры из которых состоит десятичная дробь образуют знакомый нам квадрат, при этом после запятой содержится чётное количество цифр, то можно извлечь корень из этой десятичной дроби.

Умнóжим десятичную дробь 12,25 на 100, полýчим 1225. Извлечём корень из числа 1225

$$\sqrt{1225} = 35$$

Теперь в равенстве $\sqrt{1225} = 35$ уменьшим подкореннóе число в 100 раз. В результате под корнем образуется число 12,25, и соответственно ответ уменьшится в 10 раз

$$\sqrt{12{,}25} = 3{,}5$$

Если исходное число принадлежит промежутку [100; 10000], то квадратный корень из этого исходного числа будет принадлежать промежутку [10; 100].

В этом случае применяется таблица квадратов:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Например, пусть исходным числом будет 576. Данное число принадлежит промежутку [100; 10000]. Сразу делаем вывод, что квадратный корень из числа 576 будет принадлежать промежутку [10; 100]. Теперь открываем таблицу квадратов и смотрим какое число во второй степени равно 576

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Видим, что это число 24. Значит $\sqrt{576} = 24$.

Пример 2. Извлечь квадратный корень из числа 432.
Число 432 принадлежит промежутку [100; 10000]. Значит квадратный корень следует искать в промежутке [10; 100]. Открываем таблицу квадратов и смотрим какое число во второй степени равно 432. Обнаруживаем, что число 432 в таблице квадратов отсутствует. В этом случае квадратный корень следует искать приближённо.
Извлечем квадратный корень из числа 432 с точностью до десятых.
В таблице квадратов ближайшее меньшее число к 432 это число 400. Квадратный корень из него равен 20. Отталкиваясь от числа 20, будем проверять различные десятичные дроби, целая часть которых равна 20.
Проверим, например, число 20,8. Для этого возведём его в квадрат:

$$20{,}8^2 = 432{,}64$$

Получилось число 432,64 которое превосходит исходное число 432 на 0,64. Видим, что значение 20,8 велико́ для корня $\sqrt{432}$. Проверим тогда значение 20,7

$$20{,}7^2 = 428{,}49$$

Значение 20,7 годится в качестве корня, поскольку в результате возведения этого числа в квадрат получается число 428,49, которое меньше исходного числа 432, но близко к нему. Значит $\sqrt{432} \approx 20{,}7$.

Необязательно запоминать промежутки чтобы узнать в каких границах располагается корень. Можно воспользоваться методом нахождения ближайших квадратов с чётным количеством нулей на конце.

Например, извлечём корень из числа 4225. Нам известен ближайший меньший квадрат 3600, и ближайший больший квадрат 4900

$$3600 < 4225 < 4900$$

Извлечём квадратные корни из чисел 3600 и 4900. Это числа 60 и 70 соответственно:

$$\sqrt{3600} < \sqrt{4225} < \sqrt{4900}$$

$$60 < \sqrt{4225} < 70$$

Тогда можно понять, что квадратный корень из числа 4225 располагается между числами 60 и 70. Можно даже найти его методом подбора. Корни 60 и 70 исключаем сразу, поскольку это корни чисел 3600 и 4900. Затем можно проверить, например, корень 64. Возведём его в квадрат (или умнóжим данное число само на себя)

$$\begin{array}{r} \times\ 64 \\ 64 \\ \hline 256 \\ +\ 384 \\ \hline 4096 \end{array}$$

Корень 64 не годится. Проверим корень 65

$$\begin{array}{r} \times\ 65 \\ 65 \\ \hline 325 \\ +\ 390 \\ \hline 4225 \end{array}$$

Получается 4225. Значит 65 является корнем числа 4225

$$\sqrt{4225} = 65$$