Как разложить на множители квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен вида $ax^2 + bx + c$.

В прошлых уроках мы решали квадратные уравнения. Общий вид таких уравнений выглядел так:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Левая часть этого уравнения является квадратным трёхчленом.

Одним из полезных преобразований при решении задач является разложение квадратного трёхчлена на множители. Для этого исходный квадратный трёхчлен приравнивают к нулю и решают квадратное уравнение. В этом случае говорят, что выполняется **поиск корней квадратного трёхчлена**.

Полученные корни x_1 и x_2 следует подстáвить в следующее выражение, которое и станет разложением:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

Таким образом, чтобы разложить квадратный трёхчлен на множители при помощи решения квадратного уравнения, нужно воспользоваться следующей готовой формулой:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Где левая часть — исходный квадратный трёхчлен.

Пример 1. Разложить на множители следующий квадратный трёхчлен:

$$x^2 - 8x + 12$$

Найдём корни квадратного трёхчлена. Для этого приравняем данный квадратный трёхчлен к нулю и решим квадратное уравнение:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

В данном случае коэффициент b является чётным. Поэтому можно воспользоваться формулами для чётного второго коэффициента. Чтобы сэкономить время, некоторые подробные вычисления можно пропустить:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$D_1 = k^2 - ac = (-4)^2 - 1 \times 12 = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-4) + 2}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

$$x_2 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-4) - 2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Итак, $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. Теперь воспользуемся формулой $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. В левой части вместо выражения $ax^2 + bx + c$ напишем свой квадратный трёхчлен $x^2 - 8x + 12$. А в правой части подставим имеющиеся у нас значения. В данном случае $a = 1$, $x_1 = 6$, $x_2 = 2$

$$x^2 - 8x + 12 = 1(x - 6)(x - 2) = (x - 6)(x - 2)$$

Если a равно единице (как в данном примере), то решение можно записать покороче:

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$$

Чтобы проверить правильно ли разложен квадратный трёхчлен на множители, нужно раскрыть скобки у правой части получившегося равенства.

Раскроем скобки у правой части равенства, то есть в выражении $(x - 6)(x - 2)$. Если мы всё сделали правильно, то должен получиться квадратный трёхчлен $x^2 - 8x + 12$

$$(x - 6)(x - 2) = x^2 - 6x - 2x + 12 = x^2 - 8x + 12$$

Пример 2. Разложить на множители следующий квадратный трёхчлен:

$$2x^2 - 14x + 24$$

Приравняем данный квадратный трёхчлен к нулю и решим уравнение:

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

Как и в прошлом примере коэффициент b является чётным. Поэтому можно воспользоваться формулами для чётного второго коэффициента:

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$D_1 = k^2 - ac = (-7)^2 - 2\times 24 = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{-k + \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-7)+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-k - \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-(-7)-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Итак, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. Приравняем квадратный трехчлен $2x^2 - 14x + 24$ к выражению $a(x - x_1)(x - x_2)$, где вместо переменных a, x_1 и x_2 подстáвим соответствующие значения. В данном случае $a = 2$

$$2x^2 - 14x + 24 = 2(x - 4)(x - 3)$$

Выполним проверку. Для этого раскроем скобки у правой части получившегося равенства. Если мы всё сделали правильно, то должен получиться квадратный трёхчлен $2x^2 - 14x + 24$

$$2(x - 4)(x - 3) = 2(x^2 - 4x - 3x + 12) = 2(x^2 - 7x + 12) = 2x^2 - 14x + 24$$

Как это работает

Разложение квадратного трёхчлена на множители происходит, если вместо коэффициентов квадратного трёхчлена подстáвить теорему Виета и выполнить тождественные преобразования.

Для начала рассмотрим случай, когда коэффициент a квадратного трёхчлена равен единице:

$$x^2 + bx + c$$

Вспоминаем, что если квадратное уравнение является приведённым, то теорема Виета имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \times x_2 = c \end{cases}$$

Тогда приведённый квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$ можно разложить на множители следующим образом. Сначала выразим b из уравнения $x_1 + x_2 = -b$. Для этого можно умножить обе его части на -1

$$-1\times(x_1 + x_2) = -1\times(-b)$$

$$-x_1 - x_2 = b$$

$$\underline{b = -x_1 - x_2}$$

Переменную c из теоремы Виета выражать не нужно — она уже выражена. Достаточно поменять местами левую и правую часть:

$$x_1 \times x_2 = c$$

$$\underline{c = x_1 \times x_2}$$

Теперь подставим выраженные переменные b и c в квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$

$$x^2 + bx + c = x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2$$

Раскроем скобки там где это можно:

$$x^2+bx+c=x^2+(-x_1-x_2)x+x_1x_2=x^2+(-x_1x-x_2x)+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2$$

В получившемся выражении выполним разложение многочлена на множители способом группировки. В данном случае удобно сгруппировать первый член со вторым, а третий с четвёртым:

$$x^2+bx+c=x^2+(-x_1-x_2)x+x_1x_2=x^2+(-x_1x-x_2x)+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=(x^2-x_1x)+(-x_2x+x_1x_2)$$

Из первых скобок вынесем общий множитель x, из вторых скобок — общий множитель $-x_2$

$$x^2+bx+c=x^2+(-x_1-x_2)x+x_1x_2=x^2+(-x_1x-x_2x)+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=(x^2-x_1x)+(-x_2x+x_1x_2)=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)$$

Далее замечаем, что выражение $(x-x_1)$ является общим множителем. Вынесем его за скобки:

$$x^2+bx+c=x^2+(-x_1-x_2)x+x_1x_2=x^2+(-x_1x-x_2x)+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=(x^2-x_1x)+(-x_2x+x_1x_2)=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2)$$

Мы пришли к тому, что выражение x^2+bx+c стало равно $(x-x_1)(x-x_2)$

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$$

Но это был случай, когда исходный квадратный трёхчлен является приведённым. В нём коэффициент a равен единице. И соответственно, в формуле разложения такого квадратного трехчлена коэффициент a можно опустить.

Теперь рассмотрим случай, когда коэффициент a квадратного трёхчлена не равен единице. Это как раз тот случай, когда в формуле разложения присутствует перед скобками коэффициент a

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Вспоминаем, что если квадратное уравнение не является приведённым, то есть имеет вид $ax^2+bx+c=0$, то теорема Виета принимает следующий вид:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\times x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Это потому что теорема Виета работает только для приведённых квадратных уравнений. А чтобы уравнение $ax^2+bx+c=0$ стало приведённым, нужно разделить обе его части на a

$$\frac{ax^2+bx+c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Приведённое квадратное уравнение

Далее чтобы квадратный трёхчлен вида ax^2+bx+c разложить на множители, нужно вместо b и c подставить соответствующие выражения из теоремы Виета. Но в этот раз нам следует использовать равенства $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

Для начала выразим b и c. В первом равенстве умножим обе части на a. Затем обе части получившегося равенства умножим на -1

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$ax_1+ax_2=-b$$

$$-ax_1-ax_2=b$$

$$\underline{b=-ax_1-ax_2}$$

Теперь из второго равенства выразим c. Для этого умножим обе его части на a

$$x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

$$ax_1x_2=c$$

$$\underline{c=ax_1x_2}$$

Теперь подставим выраженные переменные b и c в квадратный трёхчлен ax^2+bx+c. Для наглядности каждое преобразование будем выполнять на новой строчке:

$$ax^2+bx+c$$

$$ax^2+(-ax_1-ax_2)x+ax_1x_2$$

Здесь вместо переменных b и c были подставлены выражения $-ax_1-ax_2$ и ax_1x_2, которые мы ранее выразили из теоремы Виета. Теперь раскроем скобки там где это можно:

$$ax^2+(-ax_1-ax_2)x+ax_1x_2$$

$$ax^2+(-ax_1x-ax_2x)+ax_1x_2$$

$$ax^2-ax_1x-ax_2x+ax_1x_2$$

В получившемся выражении выполним разложение многочлена на множители способом группировки. В данном случае удобно сгруппировать первый член со вторым, а третий с четвёртым:

$$(ax^2 - ax_1x) + (-ax_2x + ax_1x_2)$$

Теперь из первых скобок вынесем общий множитель ax, а из вторых — общий множитель $-ax_2$

$$ax(x - x_1) - ax_2(x - x_1)$$

Далее замечаем, что выражение $x - x_1$ тоже является общим множителем. Вынесем его за скобки:

$$(x - x_1)(ax - ax_2)$$

Вторые скобки содержат общий множитель a. Вынесем его за скобки. Его можно расположить в самом начале выражения:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

Мы пришли к тому, что выражение $ax^2 + bx + c$ стало равно $a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Отметим, что если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители. Действительно, если не найдены корни квадратного трёхчлена, то не́чего будет подставлять в выражение $a(x - x_1)(x - x_2)$ вместо переменных x_1 и x_2.

Если квадратный трёхчлен имеет только один корень, то этот корень одновременно подставляется в x_1 и x_2. Например, квадратный трёхчлен $x^2 + 4x + 4$ имеет только один корень -2

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

Тогда значение -2 в процессе разложения на множители будет подставлено вместо x_1 и x_2. А значение a в данном случае равно единице. Её можно не записывать, поскольку это ничего не даст:

$$x^2 + 4x + 4 = (x - (-2))(x - (-2))$$

Скобки внутри скобок можно раскрыть. Тогда получим следующее:

$$x^2 + 4x + 4 = (x - (-2))(x - (-2)) = (x + 2)(x + 2)$$

При этом если нужно получить короткий ответ, последнее выражение можно записать в виде $(x + 2)^2$ поскольку выражение $(x + 2)(x + 2)$ это перемножение двух сомножителей, каждый из которых равен $(x + 2)$

$$x^2 + 4x + 4 = (x - (-2))(x - (-2)) = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$$

Примеры разложений

Пример 1. Разложить на множители следующий квадратный трёхчлен:

$$3x^2 - 2x - 1$$

Найдём корни квадратного трёхчлена:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$D_1 = k^2 - ac = (-1)^2 - 3 \times (-1) = 1 + 3 = 4$$

$$x_1 = \frac{1 + 2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_2 = \frac{1 - 2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Воспользуемся формулой разложения. В левой части напишем квадратный трёхчлен $3x^2 - 2x - 1$, а в правой части — его разложение в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$, где вместо a, x_1 и x_2 подстáвим соответствующие значения:

$$a = 3, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)\left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

Во вторых скобках можно заменить вычитание сложением:

$$3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Пример 2. Разложить на множители следующий квадратный трёхчлен:

$$3 - 11x + 6x^2$$

Упорядочим члены так, чтобы старший коэффициент располагался первым, средний — вторым, свободный член — третьим:

$$6x^2 - 11x + 3$$

Найдём корни квадратного трёхчлена:

$$6x^2 - 11x + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times 6 \times 3 = 121 - 72 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 + 7}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{11 - 7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Воспользуемся формулой разложения:

$$a = 6, \ x_1 = \frac{3}{2}, \ x_2 = \frac{1}{3}$$

$$6x^2 - 11x + 3 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (6x - 9)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Упростим получившееся разложение. Вынесем за первые скобки общий множитель 3

$$6x^2 - 11x + 3 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (6x - 9)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 3(2x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Теперь воспользуемся сочетательным законом умножения. Напомним, что он позволяет перемножать сомножители в любом порядке. Умножим 3 на вторые скобки. Это позвóлит избавиться от дроби в этих скобках:

$$6x^2 - 11x + 3 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (6x - 9)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 3(2x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= (2x - 3)(3x - 1).$$

Пример 3. Разложить на множители следующий квадратный трёхчлен:

$$3x^2 + 7x - 6$$

Найдём корни квадратного трёхчлена:

$$3x^2+7x-6=0$$

$$D=49-4\times3\times(-6)=49+72=121$$

$$x_1=\frac{-7+11}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$x_2=\frac{-7-11}{6}=-\frac{18}{6}=-3$$

Воспользуемся формулой разложения:

$$a=3,\ \ x_1=\frac{2}{3},\ \ x_2=-3$$

$$3x^2+7x-6=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+3)=(3x-2)(x+3)$$

Пример 4. Найдите значение k, при котором разложение на множители трёхчлена $3x^2-8x+k$ содержит множитель $(x-2)$

Если разложение содержит множитель $(x-2)$, то один из корней квадратного трёхчлена равен 2. Пусть корень 2 это значение переменной x_1

$$3x^2-8x+k=3(\underset{\uparrow\, x_1}{x-2})(x-x_2)$$

Чтобы найти значение k, нужно знать чему равен второй корень. Для его определения воспользуемся теоремой Виета.

В данном случае квадратный трёхчлен не является приведённым, поэтому сумма его корней будет равна дроби $\frac{8}{3}$, а произведение корней — дроби $\frac{k}{3}$

$$\begin{cases}2+x_2=\dfrac{8}{3}\\[2mm]2x_2=\dfrac{k}{3}\end{cases}$$

Выразим из первого равенства переменную x_2 и сразу подстáвим найденное значение во второе равенство вместо x_2

$$\begin{cases}x_2=\dfrac{8}{3}-2^{\backslash 3}=\dfrac{8-6}{3}=\dfrac{2}{3}\\[2mm]2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{k}{3}\end{cases}$$

Теперь из второго равенства выразим k. Так мы найдём его значение.

$$2\times\frac{2}{3}=\frac{k}{3}$$

$$\frac{4}{3}=\frac{k}{3}$$

$$3k=12$$

$$k=4$$

Пример 5. Разложить на множители следующий квадратный трёхчлен:

$$\frac{x^2}{2}+1{,}5x-2$$

Перепишем данный трёхчлен в удобный для нас вид. Если в первом члене заменить деление умножением, то получим $x^2\times\frac{1}{2}$. Если поменять местами сомножители, то получится $\frac{1}{2}x^2$. То есть коэффициент a станет равным $\frac{1}{2}$

Коэффициент b можно перевести в обыкновенную дробь. Так проще будет искать дискриминант:

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{15}{10}x-2$$

Найдём корни квадратного трёхчлена:

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{15}{10}x-2=0$$

$$D=\left(\frac{15}{10}\right)^2-4\times\frac{1}{2}\times(-2)=\frac{225}{100}+4=2{,}25+4=6{,}25$$

$$x_1=\frac{-1{,}5+2{,}5}{2\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}=1$$

$$x_2=\frac{-1{,}5-2{,}5}{2\times\frac{1}{2}}=-\frac{4}{1}=-4$$

Воспользуемся формулой разложения:

$$\frac{x^2}{2}+1{,}5x-2=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$$

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$x^2-5x+6$$

Задание 2. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$x^2-6x-7$$

Задание 3. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$2x^2+3x-6{,}48$$

Задание 4. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$x^2+x-6$$

Задание 5. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$x^2-4x-60$$

Задание 6. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$2x^2 + 3x + 1$$

Задание 7. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$-x^2 + 6x + 27$$

Задание 8. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$3x^2 - 24x + 21$$

Задание 9. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$x^2 - 12x + 24$$

Задание 10. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$2x^2 - 5x + 3$$

Задание 11. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$5x^2 + 10x - 15$$

Задание 12. Разложить на множители квадратный трёхчлен:

$$\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$