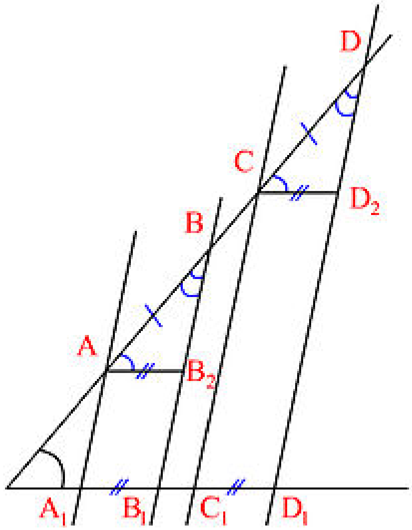
Теорема Фалеса

Теорема Фалеса: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



Рассмотрим вариант с несвязанными парами отрезков: пусть угол пересекают прямые $AA_1 \,||\, BB_1 \,||\, CC_1 \,||\, DD_1$ и при этом $AB = CD$.

1. Проведём через точки A и C прямые, параллельные другой стороне угла. Получим два параллелограмма $AB_2B_1A_1$ и $CD_2D_1C_1$. Согласно свойству параллелограмма: $AB_2 = A_1B_1$ и $CD_2 = C_1D_1$.
2. Треугольники $\triangle ABB_2$ и $\triangle CDD_2$ равны на основании второго признака равенства треугольников:

   $AB = CD$ согласно условию теоремы,
   $\angle ABB_2 = \angle CDD_2$ как соответственные, образовавшиеся при пересечении параллельных BB_1 и DD_1 прямой BD.

   Аналогично каждый из углов $\angle BAB_2$ и $\angle DCD_2$ оказывается равным углу с вершиной в точке пересечения секущих.

3. $AB_2 = CD_2$ как соответственные элементы в равных треугольниках.
4. $A_1B_1 = AB_2 = CD_2 = C_1D_1$

Доказательство в случае параллельных прямых

Проведем прямую BC. Углы ABC и BCD равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BC, а углы ACB и CBD равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей BC. Тогда по первому признаку равенства треугольников треугольники ABC и DCB равны. Отсюда следует, что AC = BD и AB = CD.

Также существует **обобщённая теорема Фалеса**:

Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки:

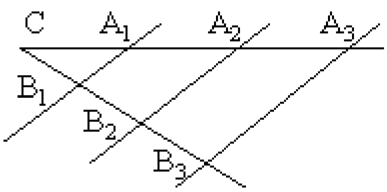
$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3}.$$

Теорема Фалеса является частным случаем обобщённой теоремы Фалеса, поскольку равные отрезки можно считать пропорциональными отрезками с коэффициентом пропорциональности, равным 1.

Обратная теорема

Если в теореме Фалеса равные отрезки начинаются от вершины (часто в школьной литературе используется такая формулировка), то обратная теорема также окажется верной. Для пересекающихся секущих она формулируется так:

Если прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной и на другой стороне угла равные (или пропорциональные) между собой отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.



В обратной теореме Фалеса важно, что равные отрезки начинаются от вершины

Таким образом (см. рис.) из того, что $\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \ldots = \mathrm{idem}$ следует, что прямые $A_1B_1||A_2B_2||\ldots$.

Если секущие параллельны, то необходимо требовать равенство отрезков на обеих секущих между собой, иначе данное утверждение становится неверным (контрпример — трапеция, пересекаемая линией, проходящей через середины оснований).

Применение теоремы Фалеса

Задача 1.

Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. Эта прямая пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что AN = NC.

Решение:

Через точку C проведем прямую, параллельную прямой AB и обозначим буквой D точку пересечения этой прямой с прямой MN (рис. 2). Так как AM = MB по условию, а MB = CD как противоположные стороны параллелограмма BCDM, то AM = DC. Треугольники AMN и CDN равны по второму признаку равенства треугольников (AM=CD,<1=<2 и <3=<4 как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и MD), поэтому AN = NC.

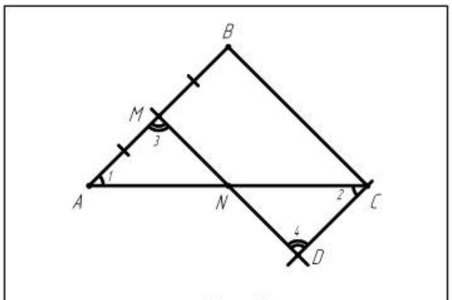


Рис. 2

Задача 2.

Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

Решение:

Проведен луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нем от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$ (рис.3), т.е. столько равных отрезков, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (на рис. 3 n=5). Проведем прямую A_nB (точка A_n – конец последнего отрезка) и построим прямые, проходящие через точки A_1 , A_2 , …, A_{n-1} и параллельные прямой A_nB. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1 , B_2 , …, B_{n-1}, которые по теореме Фалеса делят отрезок AB на n равных частей.

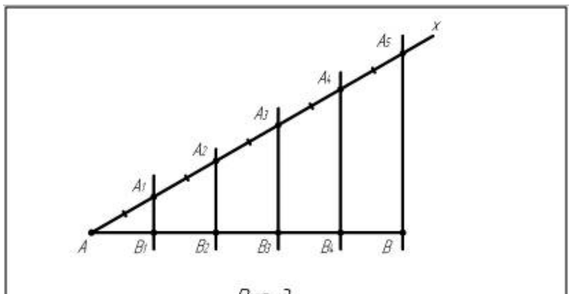


Рис. 3

Задача 3.

Разделите данный отрезок AB на 8 равных частей.

Решение:

Проведен луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нем от точки A отложим последовательно 8 равных отрезков AA_1, A_1A_2, …, A_7A_8 (рис.3), т.е. столько равных отрезков, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (рис. 4). Проведем прямую A_8B (точка A_8 – конец последнего отрезка) и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, …, A_7 и параллельные прямой A_8B. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, …, B_7, которые по теореме Фалеса делят отрезок AB на 8 равных частей.

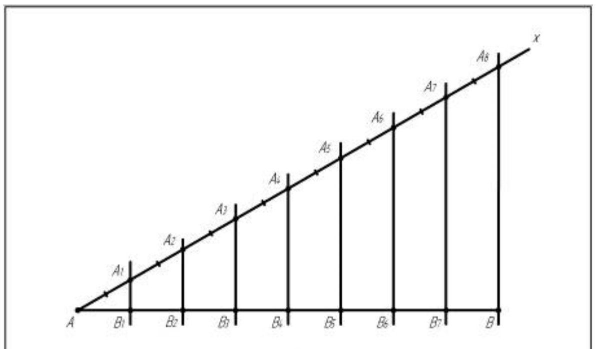
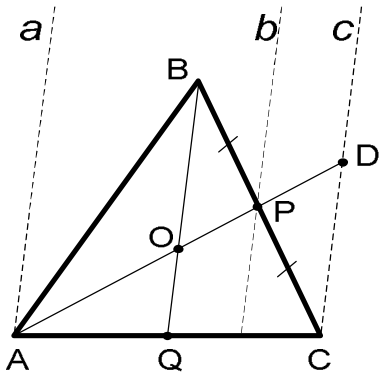


Рис. 4

Задача 4.

Дан треугольник ABC. На стороне BC взята точка P так, что BP=PC, а на стороне AC взята точка Q такая, что AQ : QC = 5 : 3. Найдите отношение AO : OP, если точка O – точка пересечения прямых AP и BQ.



Решение:

Проведем прямые параллельные BQ через точки A, P и C. Точка D – это точка пересечения прямых AP и c.

По теореме Фалеса параллельные прямые BQ, b и c, которые отсекают равные отрезки BP и PC, отсекают равные отрезки OP и PD на прямой AD.

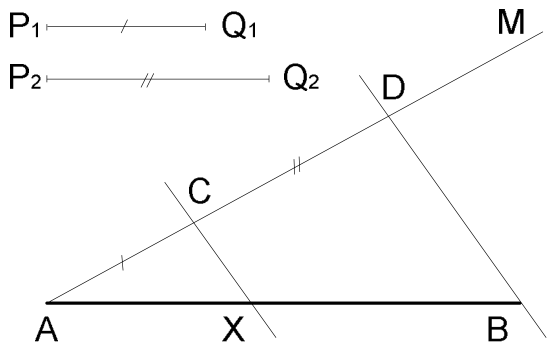
По теореме Фалеса параллельные прямые a, BQ и c, которые отсекают на прямой AC отрезки в соотношении 5 : 3, отсекают и на прямой AD отрезки в соотношении 5 : 3.

То есть AQ : QC= 5:3 и AO : OD = 5:3, а отрезок OD=2OP. Следовательно, AO : OP = 10:3.

Ответ: 10 : 3.

Задача 5.

Разделите данный отрезок AB на два отрезка AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2



<u>Решение</u>:

Проведем какой-нибудь луч AM, не лежащий на прямой AB, и на этом луче отложим последовательно отрезки AC и CD, равные отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2. Затем проведем прямую BD и прямую, проходящую через точку C параллельно прямой BD. Она по теореме Фалеса пересечет отрезок AB в искомой точке X.

Условие задач

1. Разделить данный отрезок на четыре равные части.
2. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM в точке P, причем AK=AP. Найти отношение BK:PM
3. Прямая *CD* параллельна к *AB* и пересекает угол *BOA* так, что *O,B,D* лежат на одной прямой, а также *O,A,C* лежат на одной прямой. Если *AB=5*, *OB=3* и *OD=12*, найдите длину *CD*.
4. Прямая *CD* параллельна к *AB* и пересекает угол *BOA* так, что *O,B,D* лежат на одной прямой, и на одной прямой лежат *O,A,C*. Если *AB=5*, *OA=5* и *OC=8*, определите длину *CD*.
5. Прямая *CD* параллельна к *AB* и пересекает угол *BOA* так, что *O,B,D* лежат на одной прямой и *O,A,C* также лежат на одной прямой. Если *OA=5*, *AC=3* и *BD=6*, определите длину *OB*.