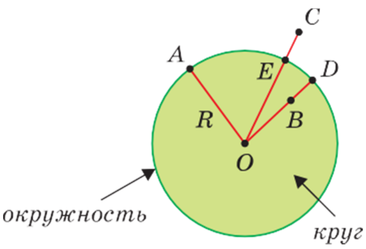
Окружность

Окружность — геометрическое место всех точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой центром, на заданное неотрицательное расстояние, называемое её радиусом.



Основные термины:

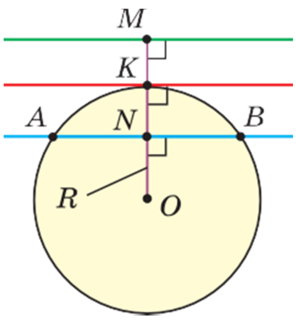
Радиус — не только величина расстояния, но и отрезок, соединяющий центр окружности с одной из её точек.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется её хордой. Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром.

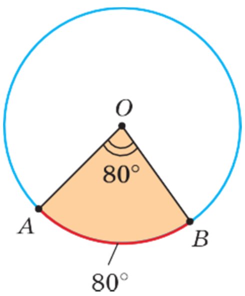
Прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

Прямая, проходящая через две различных точки окружности, называется секущей .

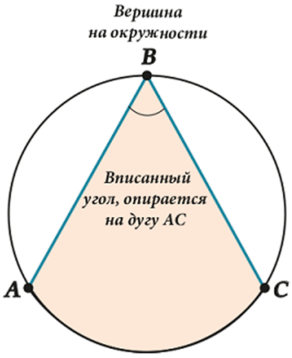
касательная
секущая



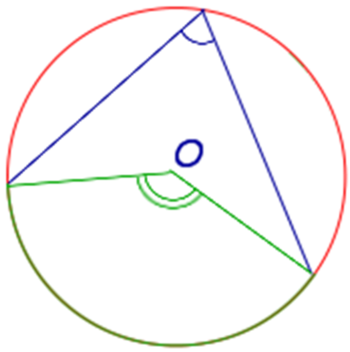
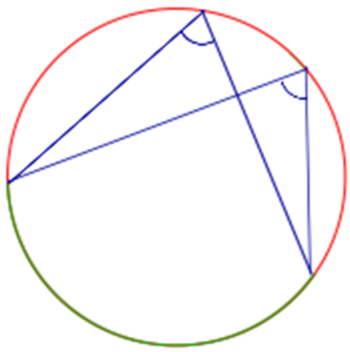
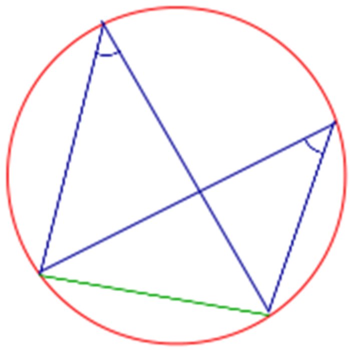
Центральный угол — угол с вершиной в центре окружности. Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую опирается.

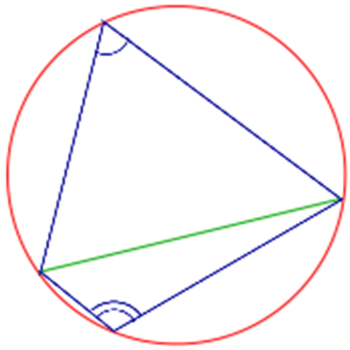
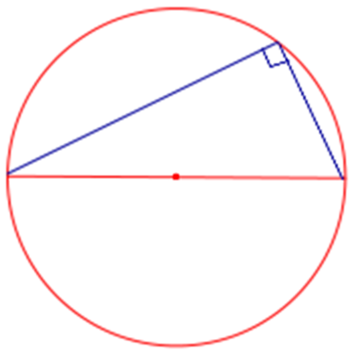
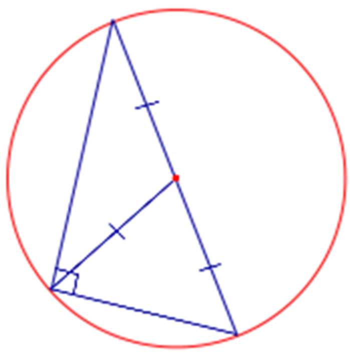


Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность. Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую опирается.

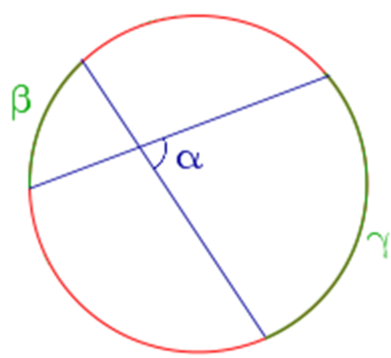


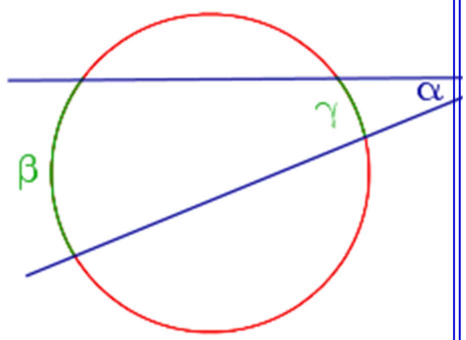
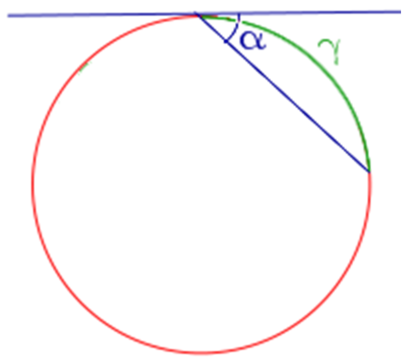
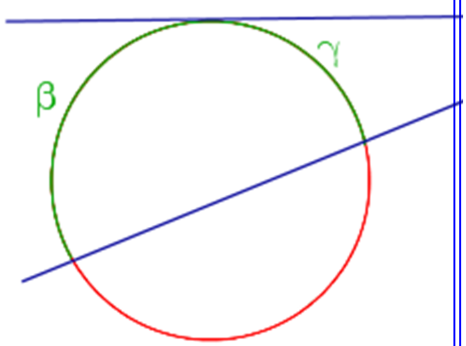
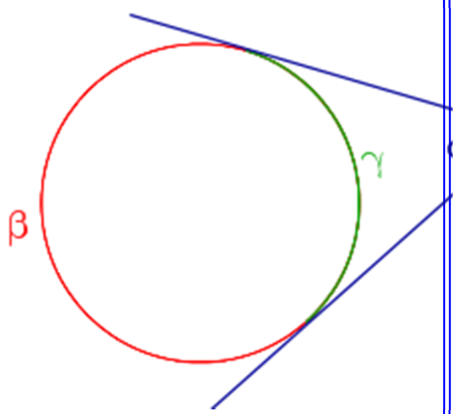
Теоремы о вписанных и центральных углах

Фигура	Рисунок	Теорема
Вписанный угол		Величина вписанного угла ***равна половине*** величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
Вписанный угол		Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу ***равны***.
Вписанный угол		Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, ***равны***, если их вершины лежат ***по одну сторону*** от этой хорды

Вписанный угол		Два вписанных угла, опирающихся на одну и ту же хорду, ***в сумме составляют*** $180°$, если их вершины лежат ***по разные стороны*** от этой хорды
Вписанный угол		Вписанный угол является прямым углом, тогда и только тогда, когда он ***опирается на*** ***диаметр***
Окружность, описанная около прямоугольного треугольника		Середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной около этого треугольника окружности.

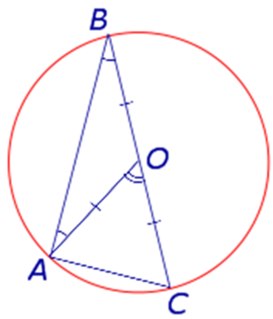
Теоремы об углах, образованных хордами, касательными и секущими

Фигура	**Рисунок**	**Теорема**	**Формула**
Угол, образованный пересекающимися хордами		Величина угла, образованного пересекающимися хордами, равна половине суммы величин дуг, заключённых между его сторонами.	$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$

Угол, образованный секущими, которые пересекаются вне круга		Величина угла, образованного секущими, пересекающимися вне круга, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами	$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$
Угол, образованный касательной и хордой, проходящей через точку касания		Величина угла, образованного касательной и хордой, проходящей через точку касания, равна половине величины дуги, заключённой между его сторонами	$\alpha = \frac{\gamma}{2}$
Угол, образованный касательной и секущей		Величина угла, образованного касательной и секущей, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами	$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$
Угол, образованный двумя касательными к окружности		Величина угла, образованного двумя касательными к окружности, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами	$\beta + \gamma = 2\pi;$ $\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2};$ $\alpha = \pi - \gamma;$ $\alpha = \beta - \pi.$

Теорема 1. Величина вписанного угла равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Доказательство. Рассмотрим сначала вписанный угол ABC, сторона BC которого является диаметром окружности, и центральный угол AOC

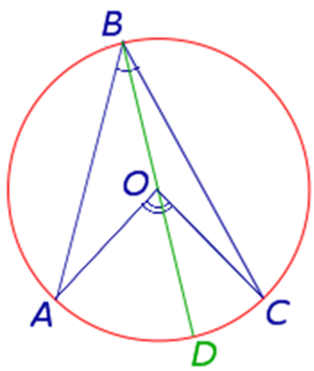


Так как отрезки AO и BO являются радиусами окружности, то треугольник AOB – равнобедренный, и угол ABO равен углу OAB. Поскольку угол AOC является внешним углом треугольника AOB, то справедливы равенства

$$\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB = 2 \cdot \angle ABO \quad \Rightarrow \quad \angle ABO = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

Таким образом, в случае, когда одна из сторон вписанного угла проходит через центр окружности, теорема 1 доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда центр окружности лежит внутри вписанного угла

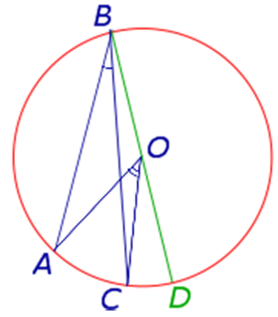


В этом случае справедливы равенства

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD + \frac{1}{2} \cdot \angle DOC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC,$$

и теорема 1 в этом случае доказана.

Осталось рассмотреть случай, когда центр окружности лежит вне вписанного угла



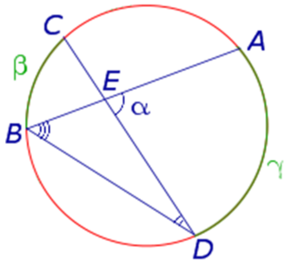
В этом случае справедливы равенства

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD - \frac{1}{2} \cdot \angle COD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Величина угла, образованного пересекающимися хордами, равна половине суммы величин дуг, заключённых между его сторонами.

Доказательство. Рассмотрим рисунок



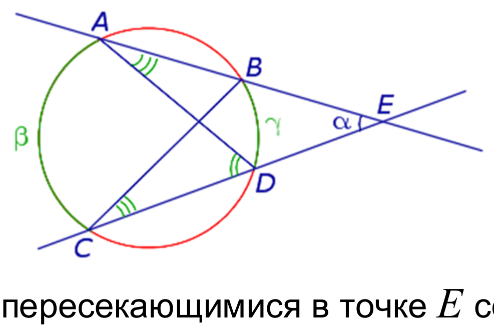
Нас интересует величина угла AED, образованного пересекающимися в точке E хордами AB и CD. Поскольку угол AED – внешний угол треугольника BED, а углы CDB и ABD являются вписанными углами, то справедливы равенства

$$\alpha = \angle AED = \angle CDB + \angle ABD = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{\beta + \gamma}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Величина угла, образованного секущими, пересекающимися вне круга, равна половине разности величин дуг, заключённых между сторонами этого угла.

Доказательство. Рассмотрим рисунок



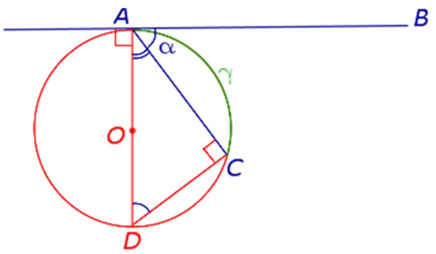
Нас интересует величина угла BED, образованного пересекающимися в точке E секущими AB и CD. Поскольку угол ADC – внешний угол треугольника ADE, а углы ADC , DCB и DAB являются вписанными углами, то справедливы равенства

$$\alpha = \angle BED = \angle ADC - \angle DAB = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{\beta - \gamma}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Величина угла, образованного касательной и хордой, проходящей через точку касания, равна половине величины дуги, заключённой между его сторонами.

Доказательство. Рассмотрим рисунок



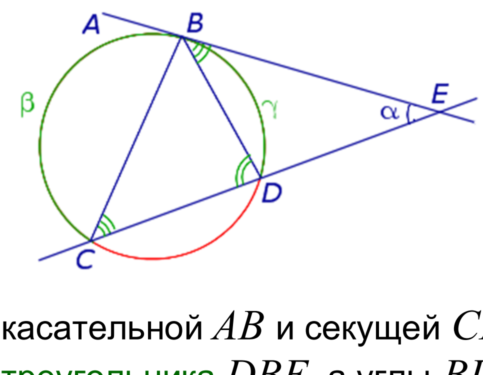
Нас интересует величина угла BAC , образованного касательной AB и хордой AC . Поскольку AD – диаметр, проходящий через точку касания, а угол ACD – вписанный угол, опирающийся на диаметр, то углы DAB и DCA – прямые. Поэтому справедливы равенства

$$\alpha = \angle CAB = \frac{\pi}{2} - \angle DAC = \angle ADC = \frac{1}{2}\gamma,$$

что и требовалось доказать

Теорема 5. Величина угла, образованного касательной и секущей, равна половине разности величин дуг, заключённых между сторонами этого угла.

Доказательство. Рассмотрим рисунок



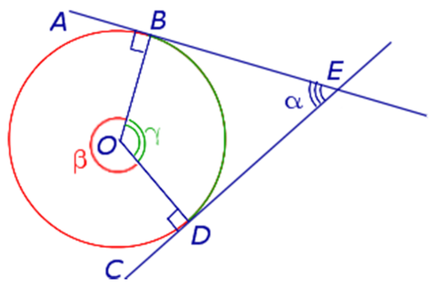
Нас интересует величина угла BED, образованного касательной AB и секущей CD. Заметим, что угол BDC – внешний угол треугольника DBE, а углы BDC и BCD являются вписанными углами. Кроме того, углы DBE и DCB, в силу теоремы 4, равны. Поэтому справедливы равенства

$$\alpha = \angle CDB - \angle DBE = \angle CDB - \angle DCB = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{\beta - \gamma}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6.Величина угла, образованного двумя касательными к окружности, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами.

Доказательство. Рассмотрим рисунок



Нас интересует величина угла BED, образованного касательными AB и CD. Заметим, что углы BOD и BED в сумме составляют π радиан. Поэтому справедливо равенство

$$\alpha = \pi - \gamma .$$

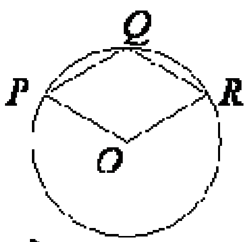
Далее получаем

$$\gamma = 2\pi - \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi - \gamma = \pi - (2\pi - \beta) = \beta - \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left[(\pi - \gamma) + (\beta - \pi) \right] = \frac{\beta - \gamma}{2},$$

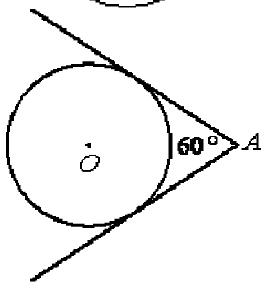
что и требовалось доказать.

УСЛОВИЕ ЗАДАЧ

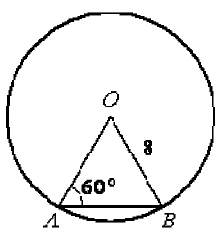
1. Точка O – центр окружности, на которой лежат точки P, Q и R таким образом, что OPQR – ромб. Найдите угол ORQ. Ответ дайте в градусах.



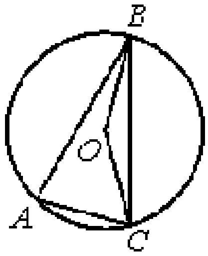
2. Из точки A проведены две касательные к окружности с центром в точке O. Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60°, а расстояние от точки A до точки O равно 6.



3. Центральный угол AOB опирается на хорду AB так, что угол OAB равен 60°. Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен 8.



4. Точка O — центр окружности, ∠ BOC=160° (см. рисунок). Найдите величину угла BAC (в градусах).



5. Точка O – центр окружности, ∠ AOB=130° (см. рисунок). Найдите величину угла ACB(в градусах).