Решение рациональных неравенств методом интервалов

Рациональным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $f(x) < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения.

Рациональные выражения с одной переменной — алгебраические выражения, включающие числа, переменную и математические действия (операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень).

Для решения рационального неравенства используют равносильные преобразования и приводят неравенство к виду $h(x) < 0$, где $h(x)$ — многочлен, произведение многочленов или алгебраическая дробь. Затем применяют метод интервалов.

Пример:

решить неравенство $\dfrac{x^2+3}{2x^2-7x-4} > 0$.

Решение

1. Найдём корни квадратного трёхчлена $2x^2-7x-4$
и разложим его на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$*:*

$2x^2-7x-4=0;$

$D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-4)=49+32=81;$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-7)-\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\frac{7-9}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}=-0{,}5;$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-7)+\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\frac{7+9}{4}=\frac{16}{4}=4;$$

$2x^2-7x-4=2(x+0{,}5)(x-4);$

$2(x+0{,}5)(x-4)=0\,|:2;$

$(x+0{,}5)(x-4)=0;$

$x_1=-0{,}5;\quad x_2=4.$

2. Разделим обе части неравенства на положительное при всех значениях x *выражение* x^2+3, *при этом знак неравенства* $>$ *не поменяется:*

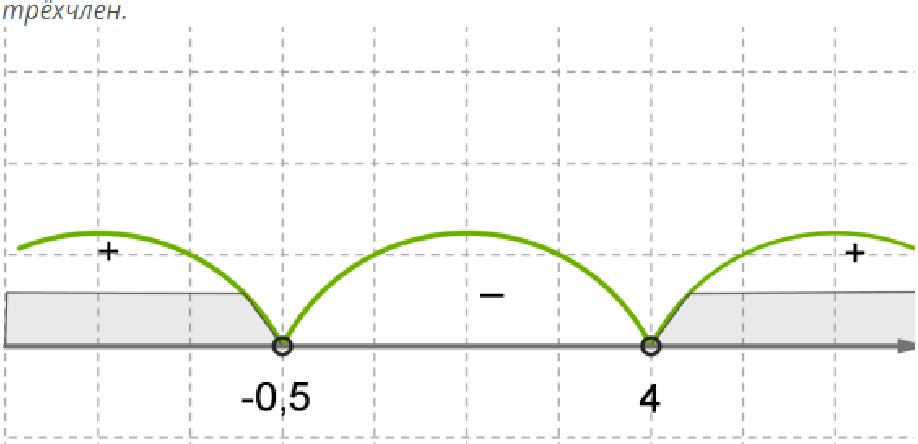
$$\frac{x^2+3}{(x+0{,}5)(x-4)}:\left(x^2+3\right)>0:\left(x^2+3\right);$$

$$\frac{x^2+3}{(x+0{,}5)(x-4)}\cdot\frac{1}{x^2+3}>0;$$

$$\frac{\cancel{\left(x^2+3\right)}\cdot 1}{(x+0{,}5)(x-4)\cdot\cancel{\left(x^2+3\right)}}>0;$$

$$\frac{1}{(x+0{,}5)(x-4)}>0.$$

3. Отметим на числовой прямой корни и найдём знаки квадратного трёхчлена на каждом интервале. Для этого из каждого интервала достаточно взять произвольно по одному значению и подставить вместо x в трёхчлен.



На интервале $(-\infty; -0{,}5)$ *возьмём* $x = -2$, *тогда* $2\cdot(-2)^2 - 7\cdot(-2) - 4 = 2\cdot 4 + 14 - 4 = 18 > 0$.
На интервале $(-0{,}5; 4)$ *возьмём* $x = 0$, *тогда* $2\cdot 0^2 - 7\cdot 0 - 4 = 0 - 0 - 4 = -4 < 0$.
На интервале $(4; +\infty)$ *возьмём* $x = 5$, *тогда* $2\cdot 5^2 - 7\cdot 5 - 4 = 2\cdot 25 - 35 - 4 = 50 - 39 = 11 > 0$.

Квадратный трёхчлен принимает положительные значения на интервалах $(-\infty; -0{,}5)$ *и* $(4; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}5)$ и $(4; +\infty)$.

Практическая часть

Решите неравенства методом интервалов

1. $(x-2)(x+7) < 0$
2. $(x+9)(x-3)(1-x) < 0$
3. $x^2(2x+8)(x-3) > 0$
4. $(x+1)^2(x+6)(x-4) \le 0$
5. $(x-4x^2)(x-1) > 0$
6. $(x+5)^2(x-7)(3x-1) > 0$
7. $\frac{x+3}{x-4} < 2$
8. $\frac{x^2-4}{2x+1} \le 0$
9. $\frac{x^2+2x-3}{2x-3} \ge 0$
10. $\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7} < 0$
11. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \le 0$