Геометрическая прогрессия

Последовательность (b_n), в которой каждый последующий член можно найти, если предыдущий член умножить на одно и то же число q, называется геометрической прогрессией.

Если последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, то для любого натурального значения n справедлива зависимость: $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Если в геометрической прогрессии (b_n) известен первый член b_1 и знаменатель q, то возможно найти любой член прогрессии.
$b_2 = b_1 \cdot q$;
$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2$;
$b_4 = b_1 \cdot q^3$
и т. д.

Общий член геометрической прогрессии b_n можно вычислить, используя формулу:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, где
n — порядковый номер члена прогрессии,
b_1 — первый член последовательности,
q — знаменатель.

Пример:

вычислить первые пять членов геометрической прогрессии и написать формулу нахождения n-го члена, если $b_1 = 8$ и $q = 0{,}5$.

$b_1 = 8$;

$b_2 = b_1 \cdot q = 8 \cdot 0{,}5 = 4$;

$b_3 = b_2 \cdot q = 4 \cdot 0{,}5 = 2$;

$b_4 = b_3 \cdot q = 2 \cdot 0{,}5 = 1$;

$b_5 = b_4 \cdot q = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$;

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$;

$b_n = 8 \cdot 0{,}5^{n-1}$.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Сумму первых n членов геометрической прогрессии S_n можно найти, если вычислить её члены $b_1, b_2 \ldots b_n$ и затем их значения сложить.

1-я формула: $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$,

b_1 — первый член геометрической прогрессии,
b_n — n-ый член геометрической прогрессии,
q — знаменатель,
n — количество членов последовательности (порядковый номер).

2-я формула: $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Пример:

найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 8$ и $q = 0{,}5$.

I вариант
Рассмотрев первый пример, видим:
$b_1 = 8$, $b_2 = 4$, $b_3 = 2$, $b_4 = 1$ и $b_5 = 0{,}5$.
Сложив пять этих чисел, получим сумму (первых пяти членов последовательности):
$S_n = S_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 8 + 4 + 2 + 1 + 0{,}5 = 15{,}5$.

II вариант
Используется 1-я формула:
$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, *где*
$n = 5$;
$b_1 = 8$;
$q = 0{,}5$;
$b_n = b_5 = 0{,}5$ *(т. к. $n = 5$).*

$$S_5 = \frac{(0{,}5 \cdot 0{,}5 - 8)}{(0{,}5 - 1)} = 15{,}5.$$

III вариант
Используется 2-я формула:
$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

$$S_5 = \frac{8 \cdot (0{,}5^5 - 1)}{0{,}5 - 1} = 15{,}5.$$

Как видите, все три варианта решения приводят к одному и тому же результату.
Сумма первых пяти членов прогрессии равна $S_5 = 15{,}5$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — это прогрессия, у которой $|q| < 1$.

Для неё определяется понятие суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как число, к которому неограниченно приближается сумма первых членов рассматриваемой прогрессии при неограниченном возрастании числа.

$$S = \frac{b_1}{1-q},\ q \neq 1.$$

Пример:

запиши периодическую дробь $0,(8)$ *обыкновенной дробью.*
Решение*.*
Достаточно очевидно, что $0,(8) = 0{,}8 + 0{,}08 + 0{,}008 + \ldots$ *Слагаемые в правой части равенства образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен* $0{,}8$*, знаменатель равен* $0{,}1$*.*
Найдём сумму по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{0{,}8}{1-0{,}1}.$$

Осталось выполнить нужные действия с десятичными дробями:

$$\frac{0{,}8}{1-0{,}1} = \frac{0{,}8}{0{,}9} = \frac{8}{9}.$$

Таким образом, бесконечная периодическая десятичная дробь $0,(8)$ *обращается в обыкновенную дробь* $8/9$*.*
Ответ*:* $0,(8) = 8/9$*.*

Практическая часть

1. Найдите пятый член геометрической прогрессии, если ее первый член равен 270, знаменатель равен $-\frac{1}{3}$.

2. Вычислите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 6$ и $b_5 = 48$.

3. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии: 1, –2, 4, ...

4. Вычислите сумму чисел: $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$.

5. Три числа, сумма которых равна 31, образуют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 8, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

6. Представьте в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 0,(36).