7 КЛАСС

7.1. Натуральные числа от 1 до 2021 выписали друг за другом, потом вычеркнули все числа, кратные 2. После этого вычеркнули все числа, кратные 5. Сколько чисел осталось невычеркнутыми?

Решение. Если вычеркивать только четные числа, то будет вычеркнуто каждое второе число. Таких чисел 1010.

Если вычеркивать только числа, кратные пяти, то было бы вычеркнуто каждое пятое число. Таких чисел 404.

Однако среди чисел, кратных пяти, половина — это числа четные, они вычеркнуты вначале. Поэтому после вычеркивания четных чисел останется вычеркнуть еще 404 – 202 нечетных числа, кратных пяти. Поэтому вычеркнуто 1010 + 202, т.е. 1212 чисел, а невычеркнутых осталось 2021 – 1212, т.е. 809 чисел.

Ответ. 809.

7.2. Найдите такие натуральные числа *x*, *y* и *z*, которые удовлетворяют равенству $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{30}{7}$.

Решение. Так как $\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$ и $\frac{1}{y+\frac{1}{z}} < 1$, то $x = 4$ и $\frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{2}{7}$. Поэтому $y+\frac{1}{z} = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$. А так как сумма — число не натуральное, то $z = 2$ и $y = 3$.

Ответ. $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$.

7. 3. Восстановите пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} *** \\ *** \end{array} \\ \hline 8*** \\ +\ *** \\ \hline *7**2 \end{array}$$

Решение. Так как первое неполное произведение 8*** при делении на число, меньшее 9, дает в частном число четырехзначное, то цифра единиц во втором множителе — это цифра 9. Цифрой десятков в этом множителе является 0. Цифра сотен в первом множителе может быть либо 8, либо 9, т.к. если эта цифра меньше 8, то получить не менее 8000 в первом неполном произведении невозможно. Цифрой сотен во втором множителе может быть только цифра 1. Значит цифра 9 не может быть цифрой сотен в первом множителе, поскольку при сложении в этом случае получилось бы число шестизначное. Поскольку при умножении на 9 цифры единиц первого множителя результат должен оканчиваться на 2, то эта цифра единиц — цифра 8. Таким образом, в произведении 8*8 · 109 осталось определить только цифру десятков. Пробуем: 888 · 9 = 7992 < 8000. Поэтому цифрой десятков может быть только 9. Проверка показывает, что в этом случае никаких противоречий с условием нет.

Ответ. 898 · 109.

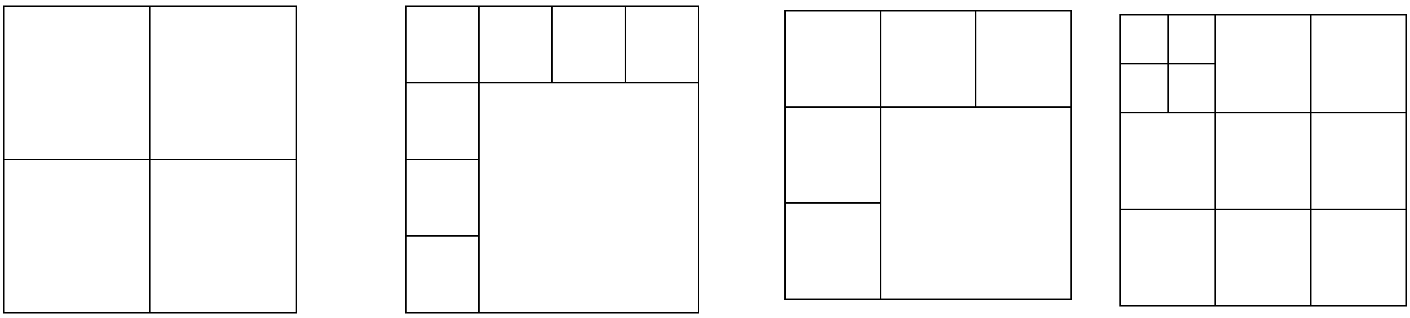
7.4. Продается мука в пакетах по 1, 3 и 5 кг. Можно ли купить 10 пакетов, которые содержат 25 кг муки?

Решение. Так как сумма десяти нечетных слагаемых есть число четное, а 25 — число нечетное, то сделать нужную покупку невозможно.

Ответ. Нельзя.

7.5. Покажите, как произвольный квадрат можно разрезать на 4, на 6, на 8, на 12 меньших квадратов.

Решение.



8 КЛАСС

8.1. Найдите шестизначное число, которое начинается с цифры 2 и увеличивается в 3 раза, если эту цифру 2 переставить с первого места в конец.

Решение. Пусть исходное 6-значное число записано цифрами $2xyztu$. Из условия следует, что после умножения этого числа на 3 получится число $xyztu2$. Произведение u на 3 оканчивается на 2 только при $u = 4$.

Теперь получаем, что после умножения цифры t на 3 и добавления 1 результат должен оканчиваться цифрой u, т.е. 4. Получается, что $t = 1$.

Далее находим, что $z = 7$, $y = 5$, $x = 8$.

Ответ. 285 714.

8.2. Найдите наименьшие натуральные числа m и k, удовлетворяющие условию

$$497m - 45k = 1.$$

Решение. Так как произведение $45k$ оканчивается цифрой 5 или цифрой 0, то произведение $497m$ должно оканчиваться цифрой 6 или цифрой 1, значит m должно оканчиваться цифрой 3 или цифрой 8. И, кроме того, разность $497m - 1$ делится на 9.

Будем постепенно увеличивать множитель m: 3, 8, 13, 18 и т.д. Получаем, что первое число m, для которого $497m - 1$ делится на 9, это число 23. Теперь находим $k = 254$.

Ответ. $M = 23$, $k = 254$.

8.3. Найдите все числа, которые втрое больше суммы своих цифр.

Решение. Пусть n — искомое число, $S(n)$ — сумма цифр числа n. Так как по условию $n = 3\cdot S(n)$, то число n делится на 3, а значит и на 9, поскольку $S(n)$ также делится на 3.

Среди однозначных есть только одно число, кратное 9 — это 9. Но условие $n = 3\cdot S(n)$ для $n = 9$ не выполняется.

Если число n — двузначное, то $S(n)$ не больше, чем 9 + 9, т.е. 18. Поэтому следует испытать такие двузначные числа, которые не превосходят числа $18 \cdot 3$, т.е. числа 54. Для таких чисел $S(n) = 9$, $3\cdot S(n) = 27$.

Если число n — больше двузначного, например, k-значное и $k > 2$. Тогда $S(n)$ не больше, чем сумма k девяток, т.е. числа $9\,k$, число $3\cdot S(n)$ не больше числа $27\,k$. Для трехзначных чисел получаем, что $3\cdot S(n)$ □ $3\cdot 27 = 81$, а само число n не меньше 100. Значит, нет трехзначных чисел n, для которых $n = 3\cdot S(n)$.

При увеличении на 1 количества знаков в числе n значение $3 \cdot S(n)$ увеличится не более, чем на 27, в то время, как для числа n граница увеличится в 10 раз: вместо 100 наименьшим будет число 1000. Так что при $k > 2$ разница между $3 \cdot S(n)$ и n будет становиться все больше. Поэтому равенство $n = 3 \cdot S(n)$ при $k > 2$ невозможно.

Ответ. 27.

8.4. Существуют ли два последовательных числа, сумма цифр каждого из которых кратна 7?

Решение. Если число оканчивается любой цифрой от 0 до 8, то при переходе к следующему числу сумма цифр увеличится на 1. Значит, если и есть нужное число, то оно должно оканчиваться цифрой 9.

Если число оканчивающееся цифрой 9, в разряде десятков имеет любую из цифр от 0 до 8, то при переходе к следующему числу сумма цифр уменьшится на 8: вместо цифры 9 разряда единиц появится 0, а цифра десятков увеличится на 1. Значит, если и есть нужное число, то оно должно оканчиваться цифрами 99.

Если число оканчивающееся цифрами 99, в разряде сотен имеет любую из цифр от 0 до 8, то при переходе к следующему числу сумма цифр уменьшится на 19: вместо цифр 9 и 9 в разрядах единиц и десятков появятся цифры 0, а цифра сотен увеличится на 1. Значит, если и есть нужное число, то оно должно оканчиваться цифрами 999.

Если число оканчивающееся цифрами 999, в разряде тысяч имеет любую из цифр от 0 до 8, то при переходе к следующему числу сумма цифр уменьшится на 26: вместо цифр 999 в классе единиц появятся цифры 0, а цифра тысяч увеличится на 1. Значит, если и есть нужное число, то оно должно оканчиваться цифрами 9999.

Так как при переходе к следующему числу вместо четырех цифр 9 появится четыре цифры 0, а цифра в разряде десятков тысяч (если это не 9) увеличится на 1, то сумма цифр изменится на 35. Поэтому если первое число имело сумму цифр, кратную 7, то и следующее будет обладать этим свойством. Например, числа 69 999 и 70 000.

Ответ. Существуют. Например, 69 999 и 70 000.

8.5. Из квадрата размерами 5 на 5 вырезали центральную клетку. Оставшуюся часть из 24 квадратиков нужно разрезать по линиям сетки на 4 равные части. Найдите как можно больше способов. Способы считаются разными, если после разрезаний получаются не равные части.

Решение. Нужные части будут получаться, если использовать центральносимметричные разрезы. При этом достаточно рассмотреть разрезы, которые идут от первого или от второго слева верхних узлов на границе квадрата.