

Разработка факультативного занятия в 9 классе по теме:
«Геометрическая интерпретация решение системы уравнений с двумя
переменными»

Цель: научиться применять геометрическую интерпретацию решения системы уравнений с двумя переменными для наглядной иллюстрации аналитического решения, определения количества ее решений, нахождения точных или приближенных решений.

Теоретическая часть

Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} f_1(x; y) = 0, \\ f_2(x; y) = 0. \end{cases}$$

Построим на координатной плоскости Oxy графики этих уравнений. Очевидны следующие утверждения:

1) если графики уравнений не пересекаются, то данная система решений не имеет;

2) если графики уравнений пересекаются, то координаты каждой точки их пересечения являются решением данной системы.

Геометрической интерпретацией решения системы уравнений пользуются для наглядной иллюстрации аналитического решения, определения количества ее решений, нахождения точных либо приближенных решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y = 25 \end{cases}$ аналитическим

способом и дать геометрическую интерпретацию ее решения.

Решение. Для решения системы аналитическим способом воспользуемся методом подстановки:

$$\begin{cases} x = 25 - 7y, \\ (25 - 7y)^2 + y^2 = 25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 25 - 7y, \\ 625 - 350y + 49y^2 + y^2 - 25 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 25 - 7y, \\ y^2 - 7y + 12 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 25 - 7y, \\ y = 3 \text{ или } y = 4. \end{cases}$$

Итак, решениями системы являются пары чисел $(4; 3)$ и $(-3; 4)$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения данной системы уравнений с двумя переменными. Графиком первого уравнения системы является окружность радиусом, равным 5 единицам, с центром в начале системы координат (рис. 15), а графиком второго уравнения — прямая AB , которая строится по двум любым ее точкам. Графики этих уравнений пересекаются в точках $A(-3; 4)$ и $B(4; 3)$. Значит, координаты этих точек $(-3; 4)$ и $(4; 3)$ являются решениями системы уравнений с двумя переменными.

Ответ: $(-3; 4)$, $(4; 3)$.

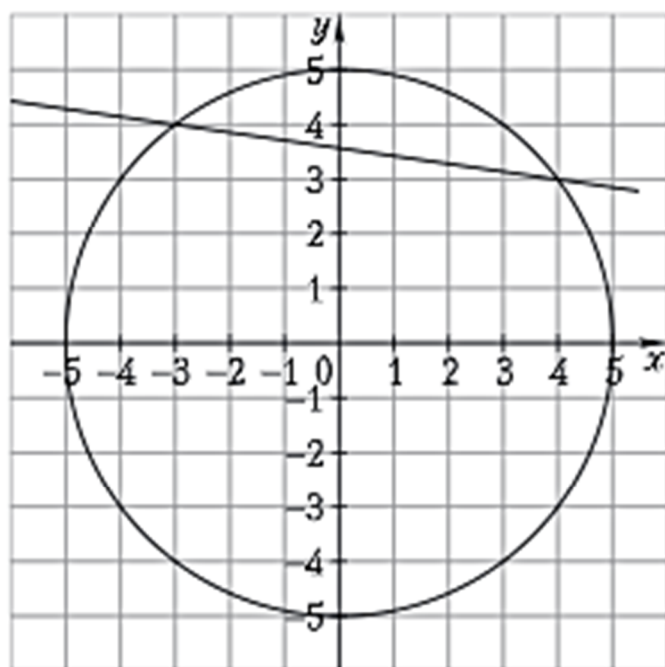


Рис. 15

Практическая часть

Задание 1. Решите аналитически систему уравнений и дайте геометрическую интерпретацию решения:

а)
$$\begin{cases} x - 5 = y, \\ xy = 14; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} (x - 4)(y - 3) = 0, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} (x - 5)(y - 3) = 0, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$$

е)
$$\begin{cases} y = 0,5x, \\ x^2 + y^2 = 36. \end{cases}$$

Задание 2. Сколько решений имеет система уравнений:

а)
$$\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = -0,5x^2 + 2? \end{cases}$$

Задание 3. Найдите графически координаты точек пересечения:

а) окружности с центром в точке $A(-1; 4)$ и радиусом 3 и прямой, проходящей через точки $B(0; 6)$ и $C(3; 3)$;

б) двух окружностей, имеющих соответствующие центры в точках $O_1(-2; 3)$ и $O_2(6; 3)$ и радиусы $r_1 = 3, r_2 = 5$.

Задание 4. Решите аналитически систему уравнений и дайте геометрическую интерпретацию решения:

а)
$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x - 8y, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Задание 5. Найдите с помощью графиков число решений системы уравнений:

а)
$$\begin{cases} y = |x|, \\ y = (x + 7)^2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ y = -x^2 + 2x + 1. \end{cases}$$

Задание 6. Найдите площадь фигуры, образованной пересечением множеств точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенствам $x^2 + y^2 \leq 16$ и $y \geq |x|$.