ГУО “Учебно-педагогический комплекс детский сад-детская школа №42
г. Могилёва”

# Факультативное занятие

## «Решение нестандартных показательных уравнений»

(11 класс)

Учитель высшей

квалификационной категории

Самусева Г.В.

Могилёв 2022

**Цели:**

- Систематизировать знания по теме «Показательная функция».
- Рассмотреть нестандартные приемы решения показательных уравнений.
- Воспитание познавательной активности у учащихся.

«Как показывает опыт, ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудных и в то же время полезных задач».

И. Бернулли.

Структура факультативного занятия.

1. Постановка цели
2. Повторение теоретического материала
3. Решение показательных уравнений, используя свойство монотонности показательной функции
4. Решение показательных уравнений методом замены переменной
5. Самостоятельная работа обучающего характера.
6. подведение итогов занятия. Задание на дом

**1. Постановка цели.**

**2. Фронтальный опрос учащихся.**

1.Какая функция называется показательной?
2.Какими свойствами обладает показательная функция?
3.Какова ее область определения?
4.Какова область изменения?
5.Какова показательная функция по монотонности (проиллюстрировать на рисунке)?
6.Возрастает или убывает функция?

а). у = $\left(\frac{5}{3}\right)^x$; б). у = $\frac{16}{3^x}$; в). у = $\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{10}}\right)^x$; г). у = $\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{10}}\right)^x$.

7. Сформулируйте теорему о корне.

**Учитель:** Повторим методы решения простейших показательных уравнений на конкретных примерах. Расскажите способ решения уравнения.

1. $4^x = 32$.
2. $3^{x+1} + 3^{x-1} = 14$.
3. $4^x - 5 * 2^x = 0$.
4. $5^{\sin x} = -\frac{1}{3}$.
5. $5^{\sin x} = 1$.

**3. Изучение нового материала. Решение нестандартных показательных уравнений.**

**Учитель:** Сейчас мы рассмотрим решение показательных уравнений с использованием свойства монотонности функции.

Решить уравнения:

1. $5^x - 3^x = 16$

(Учитель на доске дает образец решения уравнения.)

Решение.
Подбором определяем, что x = 2 - корень данного уравнения. ($5^2 - 3^2 = 16$ - верно).
Докажем, что других корней у уравнения нет.

$5^x - 3^x = 16$ $5^x = 3^x + 16$, так как $3^x \neq 0$, то $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 + \frac{16}{3^x}$.

Функция f (x) = $\left(\frac{5}{3}\right)^x$ - возрастающая на R, а функция φ (x) = $1 + \frac{16}{3^x}$ - убывающая на R.

Значит, уравнение $\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 + \frac{16}{3^x}$ имеет единственный корень.
Поэтому корней у данного уравнения, кроме x = 2, нет.
Ответ: 2.
2. $2^x + 3^x + 4^x = 9^x$
(Учитель делает только первый переход к равносильному уравнению, а затем кто-то из учеников решает на доске, комментируя решение.)
Решение.
$2^x + 3^x + 4^x = 9^x$ $2^x + 3^x = 9^x - 4^x$ $2^x + 3^x = (3^x)^2 - (2^x)^2$ $2^x + 3^x = (3^x - 2^x) * (3^x + 2^x)$ $(3^x + 2^x) * (1 - 3^x + 2^x) = 0$, так как $2^x + 3^x \neq 0$, то $1 - 3^x + 2^x = 0$ $1 + 2^x = 3^x$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$.
В левой части уравнения убывающая функция (как сумма двух убывающих функций, поэтому, если уравнение имеет корень, то он единственный).
Очевидно, что x = 1, так как $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.
Ответ: 1
3. $5^x + 12^x = 13^x$
Разделим обе части уравнения на $12^x$:

$$\left(\frac{5}{12}\right)^x + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^x$$

Т.к. y = $\left(\frac{5}{12}\right)^x + 1$ - убывающая функция, а y = $\left(\frac{13}{12}\right)^x$ - возрастающая, то в силу монотонности функций они пересекаются в одной точке, следовательно, уравнение имеет один корень. Подберем его.

Если x = 2, то $\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^2$

$$\frac{25}{144} + 1 = \frac{169}{144}$$

$$\frac{169}{144} = \frac{169}{144}$$

Ответ: x = 2.

4. $\left(\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x = \left(\sqrt{10}\right)^x$.

Решение.

(Один из учащихся решает на доске.)

$\left(\sqrt{10}\right)^x \neq 0$, разделим обе части уравнения на $\left(\sqrt{10}\right)^x$, тогда

$$\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{10}}\right)^x + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{10}}\right)^x = 1 \qquad (*)$$

$0 < \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{10}} < 1$ и $0 < \sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{10}} < 1$.

В левой части уравнения (*) - сумма двух убывающих функций есть функция убывающая. А поэтому, если уравнение (*) имеет корень, то он единственный.

$x = 2$, $\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{10}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{10}}\right)^2 = \frac{5-2\sqrt{3}}{10} + \frac{5+2\sqrt{3}}{10} = 1$

Ответ: 2.

**4. Решение показательных уравнений методом замены переменной**

Решить уравнения:

1. $2^{x^2} = \sqrt{2*3^x - 3^{2x}}$

Решение.

$x^2 \geq 0$, следовательно, $2^{x^2} \geq 1$.

Пусть $Z = 2 * 3^x - 3^{2x}$ и $3^x = y$, $y > 0$.

Тогда $Z = 2y - y^2 = -(y^2 - 2y + 1) + 1 = -(y - 1)^2 + 1$.

$Z = -(y - 1)^2 + 1$.

Рассмотрим $0 \leq Z \leq 1$.

Наибольшее значение квадратичная функция Z(y) принимает при $y = 1$, $Z = 1$.

Таким образом, $2^{x^2} \geq 1$, а $\sqrt{2*3^x - 3^{2x}} \leq 1$.

Данное равенство справедливо при

$2^{x^2} = \sqrt{2*3^x - 3^{2x}} = 1$, что возможно при $x = 0$.

Ответ: 0.

2. $4^{x} + (x - 13) * 2^{x} - 2^{x} + 22 = 0$.

Решение.

Обозначим $2^x = y$, тогда $4^x = 2^{2x} = y^2$ и получим квадратное относительно y уравнение.

$y^2 + (x - 13)y - 2x + 22 = 0$

$D = (x - 13)^2 - 4( * (-2x + 22) = x^2 - 26x + 169 + 8x - 88 = x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$.

$y_{1,2} = \frac{-x+13\pm(x-9)}{2}$; $y_1 = \frac{-x+13+x-9}{2} = 2$;

$y_2 = \frac{-x+13-x+9}{2} = 11 - x$.

Итак, имеем: $2^x = 2$,

$2^x = 11 - x$.

$2^x = 2$, $x = 1$.

$2^2 = 11 - x$.

В левой части уравнения возрастающая функция, а в правой - убывающая. Уравнение не может иметь более одного корня.

$x = 3$ ($2^3 = 11 - 3$ - верно).

Ответ: 1; 3.

3. $\sqrt{6x - x^2 - 5} * \left(3 * 5^{2\sin x - 1} - 2 * 5^{\sin x - 1} - 0{,}2\right) = 0$

Решение.

Найдем О.Д.З. x: $6x - x^2 - 5 \geq 0$ $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ $1 \leq x \leq 5$.

$\forall x \in [1;5]$.

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

$\sqrt{6x - x^2 - 5} = 0$ или $3 * 5^{2\sin x} - 2 * 5^{\sin x - 1} - 0{,}2 = 0$

$6x - x^2 - 5 = 0$; $5^{\sin x} = t$, $t > 0$, тогда

$x^2 - 6x + 5 = 0$; $\frac{3}{5}t^2 - \frac{2}{5}t - \frac{1}{5} = 0$;

$x_1 = 1$; $x_2 = 5$. $3t^2 - 2t - 1 = 0$;

$\frac{D}{4} = 1 + 3 + 4$; $t_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{3}$; $t_1 = 1$; $t_2 = -\frac{1}{3}$.

$5^{\sin x} = 1$ или $5^{\sin x} = -\frac{1}{3}$;

$\sin x = 0$ ø

$x = \pi n$, $n \in z$,

но $1 \leq x \leq 5$, т.е.

$1 \leq \pi n \leq 5$, $n = 1$, $x = \pi$ (это третий корень данного уравнения).

Ответ: 1; $\pi$; 5.

4. $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$

Обозначим $t = 2^x - \frac{1}{2^{x-1}} = 2^x - \frac{2}{2^x}$.

Возведем в куб:

$$t^3 = 2^{3x} - 3 * \left(2^x\right)^2 * \frac{2}{2^x} + 3 * 2^x * \left(\frac{2}{2^x}\right)^2 + \left(\frac{2}{2^x}\right)^3 = 2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 3 * 2 * 2^x\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right).$$

Тогда уравнение примет вид

$\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^3 = 1$ $2^x - \frac{2}{2^x} = 1$. Получим

$2^{2x} - 2^x - 2 = 0$; $2^x = 2$; $x = 1$

$2^x = -1 \in (0;\infty)$.

Ответ: x = 1.

5. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$.

Решение.

Так как

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}*\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{25-24}=1$, то

$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+2\sqrt{6}}}$.

Обозначим $t=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$ > 0, тогда $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=\dfrac{1}{t}$, и уравнение примет вид

$t+\dfrac{1}{t}=10$; $t^2-10t+1=0$; $t_{1,2}=5\pm\sqrt{24}=5\pm2\sqrt{6}$.

Значит, $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x=5+2\sqrt{6}$

$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=5-2\sqrt{6}$;

$\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{x}{2}}=5+2\sqrt{6}$ $\dfrac{x}{2}=1$ $x=2$

$\left(\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)^{\frac{x}{2}}=5+2\sqrt{6}$; $-\dfrac{x}{2}=1$; $x=-2$

Ответ: - 2; 2 .

### 5. Самостоятельная работа обучающего характера .

Решить уравнения: (на переносных досках приготовлены решения этих уравнений для последующей сверки).

1. $12^x+\left(\sqrt{5}\right)^{2x}=13^x$
2. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$

### 6. Подведение итогов занятия. Задание на дом.

№ 19, 47, 48 (Федорако Е.И.).

№ 11, 14, (Мамонтова Г.Г.).