

Государственное учреждение образования  
«Средняя школа № 42 г. Могилева»

**Конспект факультативного  
занятия по теме  
«Задачи на переливание» (6 класс)**

Учитель математики: Таланец Ирина Александровна

# Конспект факультативного занятия по математике на тему «Задачи на взвешивание, переливание, перекладывания»

## Цели:

- Обучение общим приемам решения разнообразных задач на взвешивания, переливания и перекладывания.
- Отработка умения логически рассуждать, правильно строить свои умозаключения.
- Привитие вкуса к логическим рассуждениям.
- Научить творчески относиться к решению каждой интересной задаче.

**Методы:** исследовательский, частично- поисковый, творческий.

## Ход занятия

### I. Орг. момент

«Предмет математики настолько серьезен, что нельзя упускать случая сделать его немного занимательным.»

Блез Паскаль

### II Беседа по теме занятия

#### Рассказ учителя

Решать логические задачи очень увлекательно. В них вроде бы нет никакой математики - нет ни чисел, ни функций, ни треугольников, ни векторов, а есть только лжецы и мудрецы, истина и ложь. В то же время дух математики в них чувствуется ярче всего - половина решения любой математической задачи (а иногда и гораздо больше половины) состоит в том, чтобы как следует разобраться в условии, распутать все связи между участвующими объектами.

Есть люди, для которых решение логической задачи - увлекательная, но несложная задача. Их мозг как луч прожектора сразу освещает все хитроумные построения, и к правильному ответу он приходит необычайно быстро. Замечательно, что при этом они не могут объяснить, как они пришли к решению. "Ну это же очевидно, ясно", - говорят они. "Ведь если ... " - и они начинают легко распутывать клубок противоречивых высказываний. "Действительно, все ясно", - говорит слушатель, огорченный тем, что он сам не увидел очевидного рассуждения.

Известно несколько различных способов решения логических задач. Давайте назовем их:

#### 1) Метод рассуждений.

Способ рассуждений - самый примитивный способ. Этим способом решаются самые простые логические задачи. Его идея состоит в том, что мы проводим рассуждения, используя последовательно все условия задачи, и приходим к выводу, который и будет являться ответом задачи.

**Идея метода:**  
последовательные рассуждения  
и выводы из утверждений  
содержащихся в условии задачи

#### 2) Метод таблиц.

Основной прием, который используется при решении текстовых логических задач, заключается в построении таблиц. Таблицы не только позволяют наглядно представить условие задачи или ее ответ, но в значительной степени помогают делать правильные логические выводы в ходе решения задачи.

**Идея метода:**

Оформлять результаты логических рассуждений в виде таблицы

**Преимущества метода:**

- Наглядность
- Возможность контролировать процесс рассуждений
- Возможность формализовать некоторые логические рассуждения

3) Метод графов.

4) Метод кругов Эйлера

5) Метод бильярда.

Всемирно известна игра бильярд за прямоугольным столом с лузами. Появившись до нашей эры в Индии и Китае, бильярд через много веков перекочевал в европейские страны. В России бильярд стал известен и распространен при Петре I. Игра в бильярд послужила предметом серьезных научных исследований по механике и математике. Задачи на переливание жидкостей можно очень легко решать, вычерчивая бильярдную траекторию шара, отражающегося от бортов стола, имеющего форму параллелограмма

**Идея метода:**

Нарисовать бильярдный стол и интерпретировать действия движениями бильярдного шара, фиксирование состояний в отдельной таблице.

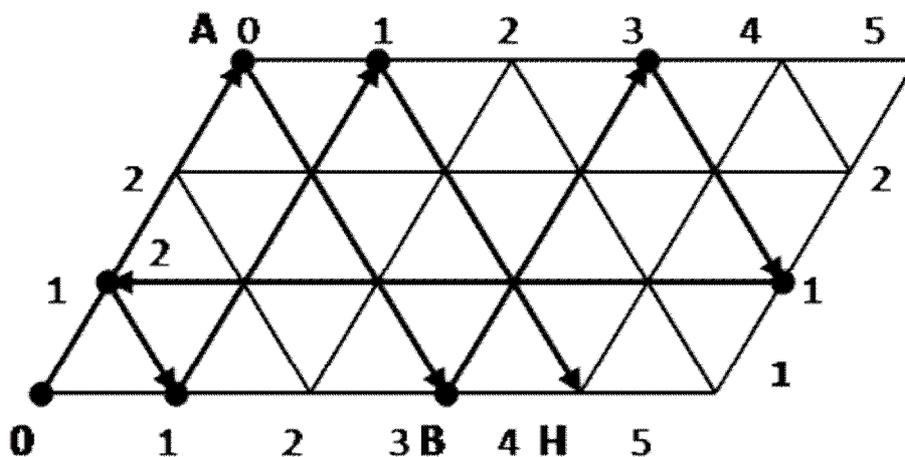
**Преимущества метода:**

- Наглядность
- Привлекательность идеи бильярда
- Возможность обобщить метод на широкий класс задач

**Задача.** Имеются два сосуда — трехлитровый и пятилитровый. Нужно, пользуясь этими сосудами, получить 4 литра воды. В нашем распоряжении водопроводный кран и раковина, куда можно выливать воду.

(Решение задачи демонстрируется учителем)

**Решение.** В рассматриваемой задаче стороны параллелограмма должны иметь длины 3 и 5 единиц. По горизонтали будем откладывать количество воды в литрах в 5-литровом сосуде, а по вертикали – в 3-литровом сосуде. На всем параллелограмме нанесена сетка из одинаковых равносторонних треугольников (см.рис.1)



**Рисунок 1**

Бильярдный шар может перемещаться только вдоль прямых, образующих сетку на параллелограмме. После удара о стороны параллелограмма шар отражается и продолжает движение

вдоль выходящего из точки борта, где произошло соударение. При этом каждая точка параллелограмма, в которой происходит соударение, полностью характеризует, сколько воды находится в каждом из сосудов.

Пусть шар находится в левом нижнем углу и после удара начнет перемещаться вверх вдоль левой боковой стороны параллелограмма до тех пор, пока не достигнет верхней стороны в точке А. Это означает, что мы полностью наполнили водой малый сосуд. Отразившись упруго, шар покатится вправо вниз и ударится о нижний борт в точке В, координаты которой 3 по горизонтали и 0 по вертикали. Это означает, что в большом сосуде 3 литра воды, а в малом сосуде воды нет, то есть мы перелили воду из малого сосуда в большой сосуд.

Проследивая дальнейший путь шара и записывая все этапы его движения в виде отдельной таблицы (табл.1), в конце концов, мы попадаем в точку Н, которая соответствует состоянию, когда малый сосуд пуст, а в большом сосуде 4 литра воды. Таким образом, получен ответ и указана последовательность переливаний, позволяющих отмерить 4 литра воды. Все 8 переливаний изображены схематически в таблице.

	<b>О</b>	<b>А</b>	<b>В</b>						<b>Н</b>
<b>М</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>0</b>
<b>Б</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>4</b>

Табл. 1

### **б) Метод блок-схем**

Более систематический подход к решению задач "на переливание" заключается в использовании блок-схем. Суть этого метода состоит в следующем. Сначала выделяются операции, которые позволяют нам точно отмерять жидкость. Эти операции называются командами. Затем устанавливается последовательность выполнения выделенных команд. Эта последовательность оформляется в виде схемы. Подобные схемы называются блок-схемами и широко используются в программировании. Составленная блок-схема является программой, выполнение которой может привести нас к решению поставленной задачи. Для этого достаточно отмечать, какие количества жидкости удастся получить при работе составленной программы. При этом обычно заполняют отдельную таблицу, в которую заносят количество жидкости в каждом из имеющихся сосудов.

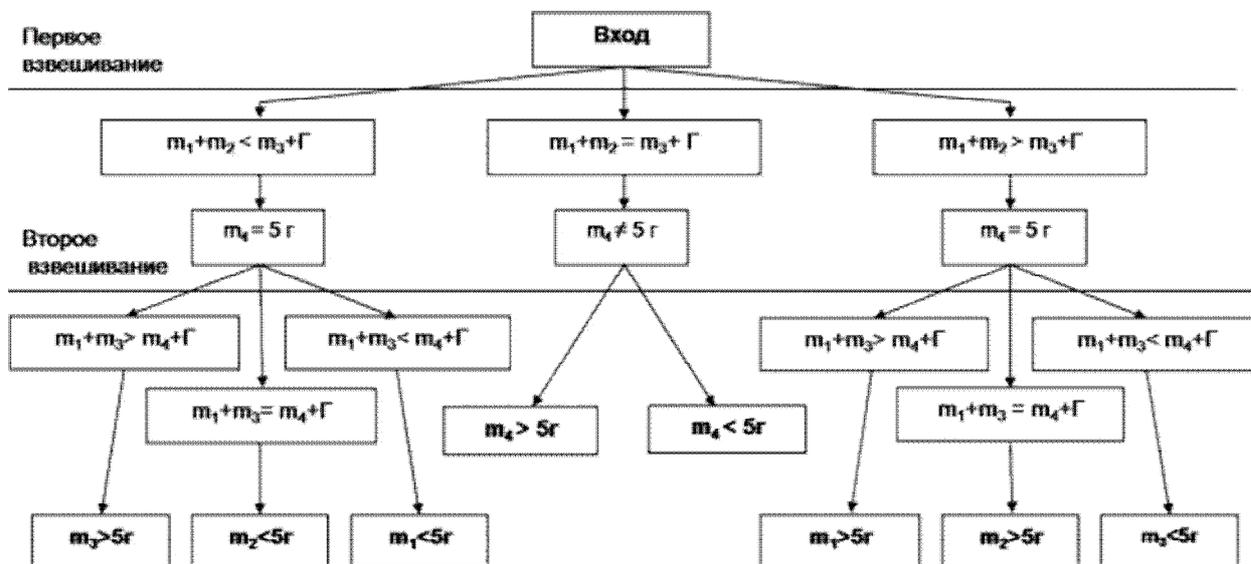
**Идея метода:**

**Описать последовательность выполнения операций, определить порядок их выполнения и фиксировать состояния**

*(Учитель комментирует решение данной задачи, представленное в виде блок-схемы. Учащиеся делятся на две группы и проверяют данное решение практическим способом, выявляя фальшивую монету из полученного набора монет.)*

**Задача.** Среди четырех монет одна фальшивая. Она отличается массой, однако неизвестно, легче она или тяжелее. Масса настоящей монеты 5 г. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах обнаружить фальшивую монету, если имеется одна гиря массой 5 г? Можно ли при этих условиях опознать, легче фальшивая монета или тяжелее?

**Решение.** Пусть  $m_1, m_2, m_3, m_4$  – массы четырех монет соответственно,  $\Gamma$  - масса гири. Оформим решение в виде блок-схемы (см.рис.). Приведенная схема задает программу, осуществление которой позволяет установить фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее. Взвешиваниям в блок-схеме соответствуют прямоугольники - операторы условного перехода. В схеме выделены первое и второе взвешивания горизонтальными линиями.



Прокомментируем для примера ход рассуждений, двигаясь лишь по одной ветви блок-схемы. Итак, первое взвешивание: пусть  $m_1 + m_2 < m_3 + \Gamma$ . Это означает, что фальшивая монета находится среди первых трех монет, и, следовательно, четвертая монета истинная, то есть  $m_4 = 5$ .

Второе взвешивание: пусть  $m_1 + m_3 > m_4 + \Gamma$ . Тогда фальшивая монета тяжелее (так как  $m_4 + \Gamma$  - вес двух истинных монет) и это либо первая, либо третья монета. Но показания весов при первом взвешивании ( $m_1 + m_2 < m_3 + \Gamma$ ) позволяют нам сделать вывод, что более тяжелой является третья монета. Если бы показания весов при втором взвешивании были противоположными, то фальшивая монета должна бы быть более легкой, а, стало быть, это была первая монета. Наконец, если при втором взвешивании весы будут в равновесии, то и третья и первая монеты не могут быть фальшивыми. Следовательно, фальшивой является вторая монета и вес ее меньше 5 грамм.

### III. Решение задач

*(Класс делится на группы по два человека. Каждая группа получает по одной задачи, решение которой обсуждается в паре, а затем объясняется у доски.)*

#### Задачи на переливание

##### **№1. Бэтмен и Человек-Паук**

Бэтмен и Человек-Паук никак не могли определить, кто из них самый главный супергерой. Что только они не делали: отжимались, бегали 100 метровку, подтягивались – то один победит, то другой. Так и не разрешив свой спор, отправились они к мудрецу. Мудрец подумал и сказал: «Самый главный супергерой – это не тот, кто сильнее, а тот, кто сообразительнее! Вот, кто решит первым задачу, тот и будет самым-самым! Слушайте: имеются два сосуда вместимостью 8 л и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из источника 7 л живой воды?» Помогите вашему любимому герою решить эту задачу.

##### **Решение**

Как в результате получить 7 литров? – Нужно к 5 литрам долить 2 л. А где их взять? – Из 5-литрового сосуда отлить 3 л. А как их получить? В 8 литровой перелить из 5 литровой 5 литров, потом еще три.

Решение задачи показано в таблице:

Ходы	1	2	3	4	5	6	7
8 л	-	5	5	8	-	2	7
5 л	5	-	5	2	2	5	-

### **№2. Молоко из Простоквашино**

Дядя Федор собрался ехать к родителям в гости и попросил у кота Матроскина 4 л простоквашинского молока. А у Матроскина только 2 пустых бидона: трехлитровый и пятилитровый. И восьмилитровое ведро, наполненное молоком. Как Матроскину отлить 4 литра молока с помощью имеющихся сосудов?

#### **Решение**

Ходы	1	2	3	4	5	6	7	8
8 л	8	3	3	6	6	1	1	4
3 л	-	-	3	-	2	2	3	-
5 л	-	5	2	2	-	5	4	4

Переливаем из восьмилитрового ведра 5 литров молока в пятилитровое. Переливаем из пятилитрового бидона 3 литра в трёхлитровый бидон. Переливаем их теперь в восьмилитровое ведро. Итак, теперь трёхлитровое ведро пусто, в восьмилитровом 6 литров молока, а в пятилитровом - 2 литра молока. Переливаем 2 литра молока из пятилитрового бидона в трёхлитровый, а потом наливаем 5 литров из восьмилитрового ведра в пятилитровый бидон. Теперь в восьмилитровом 1 литр молока, в пятилитровом - 5, а в трёхлитровом - 2 литра молока. Доливаем до полна трёхлитровый бидон из пятилитрового и переливаем эти 3 литра в восьмилитровое ведро. В восьмилитровом ведре стало 4 литра, так же, как и в пятилитровом бидоне.

### **№3. Том Сойер**

Тому Сойеру нужно покрасить забор. Он имеет 12 л краски и хочет отлить из этого количества половину, но у него нет сосуда вместимостью в 6 л. У него 2 сосуда: один – вместимостью в 8 л, а другой – вместимостью в 5 л. Каким образом налить 6 л краски в сосуд на 8 л? Какое наименьшее число переливаний необходимо при этом сделать?

#### **Решение**

Решение задачи показано в таблице:

Ходы	1	2	3	4	5	6	7	8
12 л	12	4	4	9	9	1	1	6
8 л	-	8	3	3	-	8	6	6
5 л	-	-	5	-	3	3	5	-

### **№4. Белоснежка**

У Белоснежки есть полное восьмилитровое ведро компота. Как ей отлить 4 л с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона?

#### **Решение**

Решение задачи представлено в таблице:

Ходы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8 л	8	5	5	2	2	7	7	4	4
3 л	-	3	-	3	1	1	-	3	-
5 л	-	-	3	3	5	-	1	1	4

### **Задачи на взвешивание.**

### **№5. Буратино и Кот Базилио**

У Буратино есть 27 золотых монет. Но известно, что Кот Базилио заменил одну монету на фальшивую, а она по весу тяжелее настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь Буратино определить фальшивую монету?

#### **Решение**

Разделим монеты на 3 кучки по 9 монет. Положим на чаши весов первую и вторую кучки; по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка (если весы покажут равенство, то она - в третьей кучке). Теперь, аналогично, разделим выбранную кучку на три части по три монеты, положим на весы две из этих частей и определим, в какой из частей находится фальшивая монета. Наконец, остается из трех монет определить более тяжелую: кладем на чаши весов по 1 монете - фальшивкой является более тяжелая; если же на весах равенство, то фальшивой является третья монета из части. Задача решена.

### **№6. Фальшивая монета**

Среди 101 одинаковых по виду монет одна фальшивая, отличающаяся по весу. Как с помощью чашечных весов без гирь за два взвешивания определить, легче или тяжелее фальшивая монета? Находить фальшивую монету не требуется.

#### **Решение**

Взвешиваем 50 и 50 монет: два случая.

1 случай. Равенство. Берем оставшуюся монету и ставим ее в левую кучку вместо одной из имеющихся там:

а) Левая кучка тяжелее => фальшивая монета тяжелее;

б) Левая кучка легче => фальшивая монета легче.

2 случай. Неравенство. Берем более тяжелую кучку и разбиваем ее на две кучки по 25 монет:

а) Вес кучек одинаковый => фальшивая монета легче;

б) Вес кучек неодинаковый => фальшивая монета тяжелее.

### **№7. Дядюшка Скрудж**

Дядюшке Скруджу принесли 8 одинаковых по виду монет, одна из которых не золотая, а фальшивая и легче других. Помогите Скруджу определить фальшивую монету. Какое минимальное число взвешиваний ему потребуется?

#### **Решение**

Разделим монеты на кучки по 3, 3, 2 монеты. Положим на чаши весов кучки по 3 монеты – по результату этого взвешивания мы точно узнаем, в какой из кучек находится фальшивка. Если весы покажут равенство, то фальшивая монета в третьей кучке. Тогда кладем на чаши весов монеты из третьей кучки. Фальшивкой будет та, которая легче. Если весы покажут неравенство. Тогда кладем на чаши весов по монете из более легкой кучки; если установилось равенство, то фальшивкой является третья монета из этой кучки; если неравенство – то более легкая монета и есть фальшивка. Следовательно, Скруджу потребуется минимум два взвешивания.

## **IV. Итоги занятия.**