

# Разработка факультативного занятия в 9 классе по теме: «Решение систем, содержащих однородные многочлены»

## Теоретическая часть

**Понятие однородного многочлена.** Напомним, что многочлен от двух переменных  $x$  и  $y$  называют однородным многочленом степени  $k$ , если одночлены, суммой которых он является, имеют одну и ту же степень, равную  $k$ . Например, многочлен  $x^2 - 7xy + 5y^2$  является однородным многочленом от  $x, y$  второй степени. Под **однородным уравнением** понимают уравнение, левая и правая части которого представляют собой однородные многочлены.

**Решение систем, содержащих однородные многочлены.** Пусть задана система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

в которой одно из уравнений является однородным уравнением степени  $k$ , где  $k \in \mathbf{N}$ . Рассмотрим примеры.

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8. \end{cases}$$

**Решение.** Первое уравнение заданной системы — однородное уравнение второй степени. Решим его как квадратное относительно переменной  $x$  с параметром  $y$ :

$$x = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2 - 8y^2}}{4},$$

откуда получаем:  $x = y, x = 0,5y$ .

Значит, данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = y, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 0,5y, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8. \end{cases}$$

Системы этой совокупности легко решаются подстановкой значения  $x$  из первого уравнения во второе (решение проведите самостоятельно).

$$\text{Ответ: } (1; 2), (-1; -2), \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

## Специальные приемы решения систем уравнений

### Теоретическая часть

Рассмотрим некоторые системы уравнений, для решения которых приходится применять специальные приемы.

**Почленное сложение и вычитание уравнений системы.** Мы применили этот прием при решении систем линейных уравнений.

**Пример 1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = -2, \\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 2. \end{cases}$$

*Решение.* Сложив почленно уравнения системы, получим однородное уравнение второй степени  $4x^2 - 4y^2 = 0$ , т. е.

$$(x + y)(x - y) = 0.$$

Значит, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = -2. \end{cases}$$

Решим эту совокупность.

*Ответ:*  $(-1; 1), (1; -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

## Практическая часть

**Задание 1.** Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y^2 - 2xy = -15, \\ x^2 - xy + y^2 = 24; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + 6y^2 = 5xy, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 28, \\ -3x^2 + 3xy + y^2 = 28; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 0, \\ -5x^2 + 3xy + 2y^2 = 0; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ -x^2 + xy + y^2 = 5; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 2, \\ -5x^2 - 2xy + y^2 = -2. \end{cases}$$

**Задание 2.** Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} -5x^2 + y^2 = -1, \\ 7x^2 + 3xy = 1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y^3 - x^3 = -19, \\ xy(x - y) = 6; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy - y^2 = -6; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2, \\ y^2 + xy = 4; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17, \\ y^2 - x^2 = 16; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} y^3 - x^3 = -7, \\ xy^2 + x^2y = 6. \end{cases}$$

**Задание 3.** Решите систему уравнений:

$$а) \begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 = 0, \\ 3y^2 - xy^2 = 8x; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + 3xy - 3y^2 = 1, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2. \end{cases}$$

### Ваш помощник

**К заданию 1.** а)  $\{(3\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-3\sqrt{3}; -\sqrt{3}), (4; 5), (-4; -5)\}$ ;

б)  $\{(2; 1), (1; 2), \left(\frac{3\sqrt{30}}{8}; \frac{\sqrt{30}}{8}\right), \left(-\frac{\sqrt{30}}{8}; -\frac{\sqrt{30}}{8}\right)\}$ ; г)  $\{(0; 0)\}$ .

**К заданию 2.** в)  $\{(2\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-2\sqrt{2}; \sqrt{2}), (1; 3), (-1; -3)\}$ ; е)  $\{(2; 1)\}$ .

**К заданию 3.** а)  $\left\{(0; 0), (2; 4), (1; 2), \left(\frac{1}{3}; 1\right), \left(\frac{8}{3}; 8\right)\right\}$ ; б)  $\{(1; 0), (-1; 0),$

$(1; 1), (-1; -1)\}$ .